Fiche méthode : INEGALITES

▶ *Définition*

Soit a et b deux nombres réels. On dit que a est inférieur ou égal à b si $a - b$ est négatif ou nul et que a est supérieur ou égal à b si $a - b$ est positif :

$$a \leqslant b \Longleftrightarrow a - b \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad a \geqslant b \Longleftrightarrow a - b \geqslant 0$$

Dans la pratique,
Il est souvent plus facile de montrer qu'un nombre est positif ou négatif que de montrer une inégalité. Pour montrer $a \leqslant b$ on sera donc parfois amenés à montrer $a - b \leqslant 0$ ou $b - a \geqslant 0$.

▶ *Règles de manipulation des inégalités*

- **Transitivité**

— $(a \leqslant b \text{ et } b \leqslant c) \Rightarrow a \leqslant c$
— $(a \leqslant b \text{ et } b \leqslant a) \Rightarrow a = b$

Exemple.
— Si $x \leqslant 2$ alors comme $2 \leqslant 3$, on a aussi $x \leqslant 3$.
— Si x est à la fois positif et négatif alors $x = 0$.

- **Ordre et addition**

— $a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$

— $\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases} \Rightarrow a + c \leqslant b + d$

Dans la pratique.
On peut donc additionner un même terme aux deux membres d'une inégalité et additionner termes à termes deux inégalités.

Exemple.
— $1 \leqslant 2$ donc pour tout réel x, $x + 1 \leqslant x + 2$
— Si $1 \leqslant x \leqslant 2$ et $1 \leqslant y \leqslant 2$ alors $2 \leqslant x + y \leqslant 4$.

- **Ordre et multiplication**

— si $c > 0$ alors $a \leqslant b \Leftrightarrow a.c \leqslant b.c.$
— si $c < 0$ alors $a \leqslant b \Leftrightarrow a.c \geqslant b.c.$
— Si a, b, c et d sont tous positifs alors : $\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases} \Rightarrow a.c \leqslant b.d$

Dans la pratique.
On peut donc multiplier les termes d'une inégalité par un terme positif.
On peut aussi multiplier termes à termes les inégalités, **mais seulement lorsque tous les termes sont positifs !**

Exemple.
— $2 \leqslant 3$ donc pour tout réel x **positif**, $2x \leqslant 3x$. **Attention,** l'inégalité devient fausse si x est négatif.
— Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$ alors $0 \leqslant xy \leqslant 1$.
Attention, $x \leqslant 1$ et $y \leqslant 1$ n'entraîne pas $xy \leqslant 1$.

- **Ordre et inversion**

$$\boxed{\text{Si } a \text{ et } b \text{ sont } \textbf{strictement positifs}\text{, alors : } a \leqslant b \Leftrightarrow \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}}$$

ATTENTION !

- Il ne faut JAMAIS inverser une inégalité si les termes ne sont pas positifs :

$$-2 \leqslant x \leqslant 3 \not\Rightarrow \frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant -\frac{1}{2}$$

- Il ne faut JAMAIS diviser termes à termes des inégalités

$$\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases} \not\Rightarrow \frac{a}{c} \leqslant \frac{b}{d}$$

On procède toujours en deux temps : inverser une inégalités puis multiplier termes à termes les inégalités obtenues.

Exemple : Soit a et b deux réels vérifiant : $1 \leqslant a \leqslant 2$ et $2 \leqslant b \leqslant 3$. Encadrer $\frac{a}{b}$.

▶ *Comment obtenir une inégalité ?*

1. **Par bricolage**
On peut partir d'une inégalité connue et la manipuler "au feeling", pour arriver à notre but.
Exemple . Soit x un réel vérifiant $0 \leqslant x \leqslant 1$. Montrer que : $\frac{1}{3} \leqslant \frac{x+1}{2x+1} \leqslant 2$.

Attention !
Cette méthode est risquée : il est en effet possible qu'on n'arrive pas à l'inégalité demandée. Cela ne signifie pas qu'il y ait une erreur mais plutôt qu'il faut choisir une méthode plus raffinée.

2. **En raisonnant par équivalence**
On part de l'inégalité à obtenir et on montre qu'elle est équivalente à une propriété que l'on sait être vraie.

Exemple. Montrer que pour tout réel $x \in [0,1]$, $\frac{2}{3} \leqslant \frac{x+1}{2x+1} \leqslant 1$.

3. **En se ramenant à montrer qu'un nombre est positif ou négatif**

   Exemple : Montrer que pour tout entier n non nul, $\dfrac{n-1}{n} \leqslant \dfrac{n}{n+1}$

4. **En utilisant le sens de variation des fonctions usuelles.**
   - Si f est croissante, alors $a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$. Si de plus f est strictement croissante alors il y a équivalence.
   - Si f est décroissante, alors $a \leqslant b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b)$. Si de plus f est strictement décroissante alors il y a équivalence.

   Exemple. Montrer que pour tout réel x, $e^x \leqslant e^{x+1}$.

   Exemple : Montrer que pour tout couple (a, b) de réels positifs, $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$

► *Comment obtenir le signe d'une expression ?*

Dans le point précédent, on a vu qu'il était utile pour montrer une inégalité, de se ramener à montrer qu'un nombre était positif ou négatif. La recherche du signe se fait souvent par l'une des trois technique suivantes :

1. **Tableaux de signe**
   Si x et y sont deux nombres réels, $x \times y > 0$ lorsque x et y sont de même signe et $x \times y < 0$ lorsque x et y sont de signes différents.

Pour déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient on peut donc récapituler dans un tableau les signes de chacun des termes.

   Attention !
   Cette méthode ne fonctionne pas pour le signe d'une somme !

   Exemple : Déterminer en fonction de la valeur de x le signe de $(3-x)(x-2)$.

2. **Signe d'un trinôme**

> Un trinôme ax^2+bx+c est du signe de a pour tout x, sauf lorsque x
> est compris entre les racines (s'il y en a).

Exemple Déterminer en fonction de la valeur de x le signe de $6-5x+x^2$, de x^2+x+1 et de $-x^2+x+1$.

3. **Etude des variations de la fonction**
Si l'obtention d'une inégalité se ramène à une équation du type $f(x) \geqslant 0$ où f est une fonction transcendante alors on ne peut se ramener ni à un tableau de signes, ni à l'étude du signe d'un trinôme. On peut alors étudier les variations de f.

Exemple : Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[, \ln(1+x) \leqslant x$

► *Comment résoudre des inéquations ?*

Définition

> Résoudre une inéquation d'inconnue x, c'est déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles
> l'inégalité est vraie

Dans la pratique : pour résoudre une inéquation, on se ramène à une étude de signe.

Exemple. Résoudre l'inéquation : $x^2+3x \leqslant x+\frac{5}{4}$.