Fiche méthode : ETUDE ASYMPTOTIQUE DES SUITES NUMERIQUES

▶ *Comment étudier la limite d'une suite à l'aide d'un encadrement*

- Pour montrer qu'une suite converge vers une limite l on peut utiliser le **théorème de l'encadrement** :

  Soient u, v et w trois suites telles qu'à partir d'un certain rang : $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$
  Si $\lim v_n = \lim w_n = l$, alors (u_n) converge vers l.

- Pour montrer qu'une suite diverge vers $\pm\infty$ on peut utiliser le **lemme d'entraînement** :

  Soit u et v deux suites telles qu'à partir d'un certain rang : $v_n \leqslant u_n$
  - si $\lim v_n = +\infty$ alors $\lim u_n = +\infty$
  - si $\lim u_n = -\infty$ alors $\lim v_n = -\infty$

- Un cas particulier important : **pour obtenir un encadrement sur une suite définie par une somme**, on peut commencer par encadrer les termes de la somme puis on peut additionner termes à termes les inégalités obtenues.

  Exemple. On considère le suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

  1. Vérifier que pour $k \geqslant 1$, $\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$
  2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \sqrt{n}$. Calculer la limite de (u_n).

  Correction

  1. Pour tout $k \geqslant 1$,
  $$\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sqrt{k} - \sqrt{k-1} \iff 1 \geqslant (\sqrt{k})^2 - \sqrt{k(k-1)}$$
  $$\iff \sqrt{k(k-1)} \geqslant k-1$$
  $$\iff k(k-1) \geqslant (k-1)^2 \text{ (car } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+)$$
  C'est vrai donc par équivalence l'inégalité est vrai pour tout $k \geqslant 1$.
  2. En additionnant terme à terme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$.

     Avec, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = \sqrt{n} - \sqrt{0}$. (somme téléscopique). D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \sqrt{n}$.
     Or $\lim \sqrt{n} = +\infty$. Par le lemme d'entraînement, on en déduit que $\lim u_n = +\infty$.

▶ *Comment établir la convergence d'une suite ?*

Si on nous demande seulement d'établir la convergence, on peut alors utiliser le **théorème de la limite monotone**.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
(i) si (u_n) est croissante et majorée par l alors elle converge et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant l$;
(ii) si (u_n) est décroissante et minorée par l alors elle converge et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant l$;

Attention ! Le théorème de la limite monotone ne permet pas de déterminer la limite !
En particulier si (u_n) est croissante et majorée par A, (u_n) converge mais pas nécessairement vers A.

▶ *Comment obtenir un encadrement de la limite d'une suite ?*

- par **passage à la limite dans une inégalité on peut encadrer la limite de la suite** (u_n) :

  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente.
  Si à partir d'un certain rang, $a \leqslant u_n \leqslant b$ alors $a \leqslant \lim u_n \leqslant b$

- Un cas particulier intéressant : si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *croissante* alors elle est *minorée* par son premier terme.
  De même si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *décroissante* alors elle est *majorée* par son premier terme.

Attention ! Ce dernier point ne permet JAMAIS d'appliquer la limite monotone. Ainsi, si u est croissante, il faut qu'elle soit **majorée** pour qu'elle converge, et on montre qu'elle **minorée** par son premier terme.

▶ *Comment montrer que deux suites convergent vers la même limite ?*

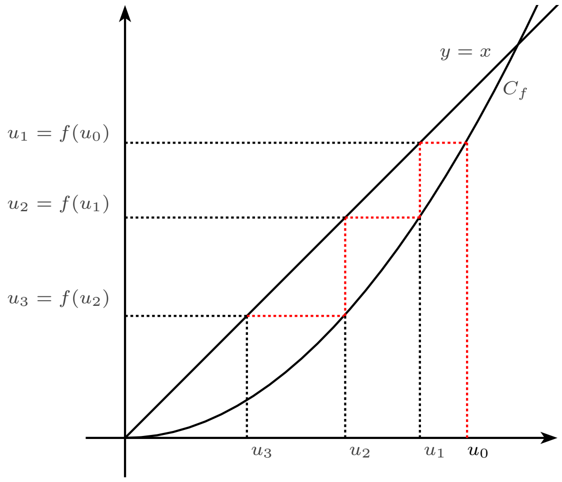
D'après le **théorème des suites adjacentes**, il suffit de montrer que les deux suites u et v sont adjacentes. C'est à dire que l'une (disons u) est croissante, l'autre (disons v) est décroissante et que $\lim(u_n - v_n) = 0$.
Les deux suites convergent alors vers la même limite l et pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant l \leqslant v_n$.
On a alors, en soustrayant u_n aux trois membres : $0 \leqslant l - u_n \leqslant v_n - u_n$. Cela prouve que u_n est une valeur approchée de l par défaut à $v_n - u_n$ près.

▶ *Quand utilise-t-on les suites extraites ?*

- **Pour montrer qu'une suite diverge.**
  - si deux suites extraites de (u_n) convergent vers des limites différentes alors (u_n) diverge ;
  - si une suite extraite d'une suite (u_n) diverge alors (u_n) diverge.
- **Pour montrer qu'une suite converge**
  Si l'on montre que les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) d'une suite (u_n) convergent vers la même limite, alors **par recouvrement des cas** la suite (u_n) converge vers cette limite.

▶ *Comment étudier une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$?*

- **Représentation graphique**



Pour déterminer les valeurs successives de la suite, on trace la représentation graphique de f ainsi que la droite d'équation $y = x$.
On place u_0 sur l'axe des abscisses, on évalue $u_1 = f(u_0)$ à l'aide de la courbe $\mathcal{C}f$ sur l'axe des ordonnées puis on ramène u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de Δ.
Il reste à réitérer le procédé.

• **La suite est-elle définie ?**
Si f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, la suite donnée par $u_{n+1} = f(u_n)$ peut ne pas être définie pour tout n, si à un moment donné u_n n'appartient plus au domaine de définition.
Ainsi, si f est définie sur $[0; +\infty[$, il faut pour que u soit bien définie, vérifier par récurrence la propriété « u_n est bien défini et positif ».
Exemple. Ainsi si la suite (u_n) est donnée par son premier terme $u_0 = 2$ et par la relation $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. Pour montrer que la suite (u_n) est bien définie, on montre par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$: « u_n est bien défini et positif ».

• **Recherche des limites possibles.**
Soit f une fonction continue en l et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers l, alors par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on a $l = f(l)$.
Attention ! Cela ne prouve pas la convergence de la suite !. La suite peut être divergente, mais **SI** elle est convergente sa limite vérifiera $l = f(l)$.

• **Etablir la convergence**
Souvent, pour établir la convergence, il suffit de montrer que la suite est croissante et majorée ou décroissante et minorée. On trouve ensuite la limite parmi les points fixes de la fonction en procédant par élimination.

• **Etablir la divergence**
On raisonne souvent par l'absurde. Il suffit en effet de montrer que la suite ne peut converger vers aucune des limites possibles ou qu'il n'y a aucune limite possible.
A noter : si de plus la suite est croissante (ou décroissante) alors elle diverge vers $+\infty$ (ou $-\infty$).