---

**Fiche méthode : CALCUL DE LIMITES**

---

## ▶ *Limites à connaître*

| **Logarithme** | **Exponentielle** | **Puissances entières** |
|---|---|---|
| — $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ ;<br>— $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$ ;<br>— $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$. | — $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$ ;<br>— $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$ ;<br>— $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$. | — $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n = +\infty$ si $n$ pair ;<br>— $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n = -\infty$ si $n$ impair ;<br>— $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n = +\infty$. |
| **Racine** | **Puissances réelles** | **Suites géométriques** |
| — $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ ;<br>— $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$. | Si $\alpha > 0$ • $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = 0$ ;<br>• $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = +\infty$.<br>Si $\alpha < 0$ • $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = +\infty$ ;<br>• $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = 0$ | — Si $q = 1$ alors $\lim q^n = 1$ ;<br>— Si $q \leqslant -1$ alors $(q^n)$ diverge sans limite ;<br>— Si $\|q\| < 1$ alors $\lim q^n = 0$ ;<br>— Si $q > 1$ alors $\lim q^n = +\infty$ |

| **Croissances comparées** | **Croissances comparées** |
|---|---|
| ∗ Si $\alpha > 0$, $x^\alpha$ l'emporte sur $\ln(x)$.<br>— $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$ ;<br>— $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$<br>∗ Si $\|a\| > 1, a^n$ l'emporte sur $n^\alpha$ : $\lim \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$ | ∗ Si $\alpha > 0$, $e^x$ l'emporte sur $x^\alpha$.<br>— $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ ;<br>— $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n e^x = 0$<br>∗ $n!$ l'emporte sur $a^n$ : $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$ |

## ▶ *Opération sur les limites*

— **Limite par composition.**
Connaissant les limites « usuelles », certaines autres limites s'obtiennent par composition.

**Exemple 1**

Calculer les limites suivantes :

$$(1)\ \lim_{x\to 0} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \qquad (2)\ \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}} \qquad (3)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} e^{-\frac{1}{x}}$$

**Correction**

1. $\lim\limits_{x\to 0} 1 + \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1 + \dfrac{1}{x^2}) = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.
3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{-1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

— **Limite par somme.**

| $\lim\limits_a f$ | $l \in \mathbb{R}$ | $l \in \mathbb{R}$ | $l \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_a g$ | $l' \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_a (f+g)$ | $l+l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | F.I | $+\infty$ | $-\infty$ |

— **Limite par produit**

| $\lim\limits_a f$ | $l \in \mathbb{R}$ | $l \in \mathbb{R}_+^*$ | $l \in \mathbb{R}_+^*$ | $0$ | $l \in \mathbb{R}_-^*$ | $l \in \mathbb{R}_-^*$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_a g$ | $l' \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $\pm\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_a f.g$ | $ll'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | F.I. | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

— **Limite par inverse**

| $\lim\limits_a f$ | $l \in \mathbb{R}^*$ | $0$ | $\pm\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\lim\limits_a \dfrac{1}{f}$ | $\dfrac{1}{l}$ | $\begin{cases} +\infty \text{ si } f(x) > 0 \text{ au voisinage de } a \\ -\infty \text{ si } f(x) < 0 \text{ au voisinage de } a \\ \text{pas de limite sinon} \end{cases}$ | $0$ |

### Exemple 2

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{e^{-x}+e^{x}}$ :

**Correction**

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+\dfrac{1}{x}) = 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}+e^{x} = +\infty$.

On en déduit donc que par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{e^{-x}+e^{x}} = 0$

## ► *Comment utiliser les croissances comparées ?*

**Attention :** on ne peut utiliser les croissances comparées uniquement lorsqu'elles se présentent **exactement**. Pour utiliser une croissance comparée, il faut donc souvent faire des manipulations simples pour s'y ramener exactement.

### Exemple 3

Calculer si vous le pouvez les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(3x)}{x}$; 2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(3+x)}{x}$ ;

**Correction**

1. $\dfrac{\ln(3x)}{x} = \dfrac{\ln(3)+\ln(x)}{x} = \dfrac{\ln(3)}{x} + \dfrac{\ln(x)}{x}$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissances comparées).

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(3)}{x} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(3x)}{x} = 0$

2. $\frac{\ln(3+x)}{x} = \frac{\ln(3+x)}{3+x} \times \frac{3+x}{x}$. Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} 3+x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissances comparées).

Il vient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(3+x)}{3+x} = 0$. De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3+x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x} = 1$ (quotient de polynômes).

On en conclut par produit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(3+x)}{x} = 0$.

## ▶ *Comment lever une forme indéterminée ?*

— **Factorisation par le terme dominant**

Lorsque l'on cherche à calculer la limite d'une fonction faisant apparaître une somme ou une différence de termes ayant des ordres de grandeur différents, on peut factoriser par la quantité la plus « forte » c'est à dire celle qui « l'emporte » dans un calcul de limite, c'est à dire celle qui impose sa limite (au regard par exemple des croissances comparées).

**Exemple 4**

Calculer si elle existe la limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)+x}{x+1}$ :

**Correction**

On factorise au numérateur par $x$ (car $x$ l'emporte sur $\ln(x)$ et au dénominateur par $x$ :
$\dfrac{\ln(x)+x}{x+1}=\dfrac{x}{x}.\dfrac{\frac{\ln(x)}{x}+1}{1+\frac{1}{x}}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$. On a donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\ln(x)}{x}+1}{1+\frac{1}{x}}=1.$, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)+x}{x+1}=1$

— **Limite d'un quotient de polynômes**

La limite en $\pm\infty$ d'un quotient de deux fonctions polynômes est égale à la limite du quotient des monômes de plus haut degré.

— **Changement de variable**

On fait un changement de variable dans les cas suivants :

- ∗ Pour se ramener à une croissance comparée exacte. Ainsi dans $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x}$, on posera $h=\sqrt{x}$.
- ∗ Pour faire apparaître une des limites classiques $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}$. Ainsi dans $\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$, on posera $h=2x$.
- ∗ Pour calculer une limite en $a\neq0$. Ainsi pour calculer $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(x)}{x-1}$, on posera $h=x-1$. De manière générale pour calculer une limite en $a$, on fait le changement de variables $h=x-a$.

**Exemple 5**

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x}$ 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ 3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(x)}{x-1}$.

**Correction**

1. On pose $h=\sqrt{x}$. On a donc aussi $x=h^2$. Lorsque $x$ tend vers $+\infty$, $h$ tend vers $+\infty$.
Dès lors, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x}=\lim\limits_{h\to+\infty}\dfrac{e^h}{h^2}=0$ (croissances comparées).
2. On pense à la limite de $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$. On pose donc $h=\frac{1}{x}$ (d'où $x=\frac{1}{h}$). Lorsque $x$ tend vers l'infini, $h$ tend vers 0.
Il vient : $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}\ln(1+h)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1$.
3. On pose $h=x-1$ d'où $x=h+1$. Lorsque $x$ tend vers 1, $h$ tend vers 0.
Il vient : $\lim_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x-1}=\lim_{h\to0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$.

— **Produit par la quantité conjuguée**

Lorsque le calcul de la limite fait apparaître une somme ou une différence faisant intervenir une (ou des) racine(s) carrée(s), par exemple $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$, on peut multiplier par la quantité conjuguée c'est à dire : $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$ de manière à amener une identité remarquable de la forme $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ qui permette d'enlever les racines.

**Exemple 6**
Calculer si elle existe $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$.

**Correction**

On multiplie au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1} &= \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \\ &= \frac{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{x+1-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}+\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-1}=+\infty$ et donc par inverse : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=0$

— **Limite d'une forme $f(x)^{g(x)}$**

Lorsque l'on veut calculer la limite d'une telle forme (avec $f(x)>0$ au voisinage de $a$), **avant même de commencer à réfléchir**, on écrit la fonction sous forme exponentielle :

$$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln(f(x))}$$

et on cherche la limite de $g(x)\ln(f(x)$ puis on compose par exp

**Exemple 7**
Calculer si elle existe $\lim\limits_{x\to0} x^x$.

**Correction**

On remarque tout d'abord, avant de réfléchir que : $x^x=e^{x\ln(x)}$.

Puis $\lim\limits_{x\to0} x\ln(x)=0$ et $\lim\limits_{u\to1} e^u=1$, d'où $\lim\limits_{x\to0} x^x=1$ ;