Chapitre 13

Variables discrètes usuelles

On va maintenant passer en revue les lois discrètes, finies ou infinies, qu'il faut connaître. Dans toute cette partie, X désigne une variable aléatoire discrète.
On note, comme d'habitude, $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs que peut prendre X. Rappelons que décrire la loi de X revient à donner la valeur de $P(X=k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.

I Loi uniforme $\mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

On dit que X suit la **loi uniforme sur** $\llbracket 1, n \rrbracket$, ce qui se note parfois $X \rightsquigarrow \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, si $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et si :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X=k) = \frac{1}{n}$$

Exemple 1

Par exemple, si X désigne le score obtenu en lançant un dé équilibré, alors $X \rightsquigarrow \mathscr{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$

Proposition 1

Si $X \rightsquigarrow \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, alors $E(X) = \dfrac{1+n}{2}$ (« la moyenne des extrémités »).

II Loi de Bernoulli $\mathscr{B}(1, p)$

On dit que $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(1, p)$ (où $p \in [0, 1]$) si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et si :

$$P(X=1) = p$$

On a alors nécessairement $P(X=0) = 1-p$.
La loi de Bernoulli intervient à chaque fois qu'il est question d'expérience aléatoire à deux résultats possibles.

Exemple 2

On tire une boule dans une urne qui contient des boules blanches et des boules noires. On suppose que la proportion de boules blanches par rapport au nombre total de boules est p. On définit la variable aléatoire X comme étant égale à 1 si la boule tirée est blanche et égale à 0 sinon. Alors $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(1, p)$.

Proposition 2

Si $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(1, p)$, alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$.

III Loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in [0,1]$.
On dit que $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(n,p)$ si $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et si :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Exercice 1

Démontrer que la formule ci-dessus définit bien une loi de probabilité (utiliser la formule du binôme).

Lorsqu'on répète n fois de façons indépendantes la même expérience de Bernoulli de paramètre p (disons que p est la probabilité d'un « succès »), alors le *nombre de succés* suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$.

Exemple 3

(tirage avec remise)
Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches par rapport au total est notée p. On tire n fois une boule, en la remettant dans l'urne à chaque fois. On note X le nombre total de boules blanches tirées. Alors $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(n,p)$.

Exemple 4

On lance quatre dés équilibré et on note X le nombre de « 6 » obtenus. Alors $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(4,1/6)$.

Exemple 5

On lance n fois une pièce qui donne pile avec la probabilité p et on note X le nombre de piles obtenus. Alors $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(n,p)$.

Proposition 3

Si $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(n,p)$, alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.
On remarquera qu'il suffit de multiplier par n l'espérance et la variance de la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(1,p)$.

IV Loi géomètrique $\mathscr{G}(p)$

Soit $p \in [0, 1]$.
On dit que X suit *la loi géométrique de paramètre* p, ce qui se note $X \rightsquigarrow \mathscr{G}(p)$, si $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$ et si :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

Exercice 2

Démontrer que la formule ci-dessus définit bien une loi de probabilité.

La loi géomètrique intervient lorsqu'on répète à l'infini et de façons indépendantes la même expérience de Bernoulli de paramètre p et qu'on attend « le premier succes ».

Exemple 6

On lance une infinité de fois un dé équilibrée et on note X le numéro du premier lancer qui donner "6". Alors $X \rightsquigarrow \mathscr{G}(1/6)$

Proposition 4

Si $\rightsquigarrow \mathscr{G}(p)$, alors :

$$E(X) = \frac{1}{p} \qquad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

.

IV.1 - Loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$

Soit $\lambda > 0$.
On dit que X suit *la loi de Poisson de paramètre* λ, ce qui se note $X \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda)$, si $X(\Omega) = \mathbf{N}$ et si :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Exercice 3

Démontrer que la formule ci-dessus définit bien une loi de probabilité.

La loi de Poisson est aussi appelée *loi des évènements rares*, parce que $P(X = k)$ décroît très vite vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$.

Exemple 7

En pratique, on considère que le nombre d'appels téléphoniques, dans un intervalle de temps fixé et sur un poste fixé, suit une loi de Poisson.

Proposition 5

Si $X \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda)$, alors :

$$E(X) = \lambda \qquad V(X) = \lambda$$