Chapitre 11
Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini

Dans tout ce chapitre l'univers Ω sera **fini**. On aborde donc ici uniquement le cas de variables aléatoires dites finies.

I Définitions

Soit une expérience aléatoire décrite par un univers Ω et soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.
On peut vouloir ne s'intéresser qu'à une partie de l'information donnée par cette expérience aléatoire.

Exemples 1

1. Lancer de deux dés : on s'intéresse uniquement à la somme des résultats des deux dés :
$$\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}^2$$
2. Familles à 4 enfants : nombre de garçons.
$$\Omega_2 = \{F, G\}^4$$

Une variable aléatoire va alors associer au résultat de l'expérience aléatoire une valeur numérique. La façon dont cette variable décrit l'expérience définit explicitement cette variable.

Définition 1 : *Variables aléatoires*

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\omega), P)$ un espace probabilisé fini.
On appelle variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ toute application :
$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$
On note en abrégé X est une V.A.R.

☞ **Notation** :

- On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par la variable X.
- Soit $I \subset \mathbb{R}$. On note $(X \in I)$ l'évènement $\{\omega \in \Omega; X(w) \in I\}$.
Ainsi, si $a \in \mathbb{R}$:
$$(X = a) \text{ est l'évènement } \{\omega \in \Omega \;:\; X(\omega) = a\}$$
$$(X \leqslant a) \text{ est l'évènement } \{\omega \in \Omega \;:\; X(\omega) \leqslant a\}$$

Remarque 1

Comme Ω est fini, par exemple $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, X ne prend qu'un nombre fini de valeurs : au plus n.
Ainsi, $Card(X(\Omega)) \leqslant Card(\Omega)$.

Dans la suite, on va s'intéresser aux **V.A.R. finies**. ($X(\Omega)$ est un ensemble finis de valeurs)
A un chapitre suivant, on généralisera toutes ces définitions aux **V.A.R. discrètes**. ($X(\Omega)$ peut être « listé »et infini).
Puis, vous étudierez enfin les **V.A.R. continues**. ($X(\Omega)$ ne peut être « listé »)

Exemple 2

On lance deux dés. On définit X la variable aléatoire qui à un lancer fait correspondre la somme des deux dés.

$$X : \begin{cases} (1,1) \to 2 \\ (1,2) \to 3 \\ (1,3) \to 4 \\ \dots \\ (6,6) \to 12 \end{cases}$$

Alors $X(\Omega_1) = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

Exercice 1

Dans le cadre des famille de 4 enfants, on note X la variable dénombrant les garçons. Compléter :

$$X(\Omega_2) =$$

II Loi de probabilité d'une V.A.R finie

Soit X une V.A.R sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n)$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

Définition 2

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\omega), P)$ un espace probabilisé fini.
On appelle **loi de probabilité** de la V.A.R. X (ou loi de distribution de X) l'ensemble des couples :

$$(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots, (x_n, p_n)$$

où $\forall i \in [\![1, n]\!],\ p_i = P(X = x_i)$

Exemple 3

On choisit une carte dans un jeu de 32 cartes.
Ω est l'ensemble des 32 cartes et on munit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega)\}$ du modèle d'équiprobabilité P.
On gagne 3 euros en sortant un as ou un roi, 2 euros pour une dame, 1 euro pour un valet ; on perd 2 euros pour un 10, un 9 ou un 8 et on perd 4 euros pour un 7.
On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique à la fin de la partie. La loi de X est alors :

Proposition 1

Soit X une V.A.R. finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
Si $\{(x_i, p_i), 1 \leqslant i \leqslant n\}$ est la loi de probabilité de X alors :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ p_i \geqslant 0 \qquad \text{ET} \qquad \sum_{k=1}^{n} p_i = 1$$

Exercice 2

Une urne contient 8 boules rouges et 5 boules blanches ; on effectue des tirages au hasard et sans remise d'une boule. X est le rang d'apparition d'apparition de la première boule rouge. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 3

Une urne contient 4 boules indiscernables numérotées de 1 à 4 ; on tire au hasard, successivement une boule de l'urne et à chaque tirage on retire les boules dont le numéro est inférieur ou égal au numéro tiré. X est la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne. Déterminer la loi de X.

Exercice 4

On jette deux dés équilibrés, D_1 et D_2 et X est la somme des nombres obtenus s'ils sont pairs, le nombre pair s'il n'y en a qu'un et $X = 0$ si aucun n'est pair. N est le nombre de dés ayant donné un nombre pair. Déterminer la loi de X.

Exercice 5

On a n urnes $U_1, U_2, \dots, U_n$, toute urne U_k contenant k boules numérotées de 1 à k. On tire au hasard une boule de U_n qu'on remet dans l'urne et si m est le numéro tiré, on tire au hasard une boule dans l'urne U_m. La variable aléatoire X désigne le numéro de cette boule.
Déterminer la loi de X. (on l'exprimera sous forme d'une somme).

III Fonction de répartition

Définition 3 : *Fonction de répartition d'une V.A.R.*

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Soit X une V.A.R. finie sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.
On appelle **fonction de répartition de la variable** X la fonction :

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & P(X \leqslant x) \end{array}$$

☞**IMPORTANT :** Soit X une V.A.R et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$ alors :

$$P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$$

Proposition 2

- F_X est une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant F_X(x) \leqslant 1$.

Représentation graphique de la fonction de répartition d'une V.A.R finie.
Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ alors :

$$\begin{cases} F_X(x) = 0 & si\ x < x_1 \\ F_X = p_1 & si\ x_1 \leqslant x < x_2 \\ F_X = p_1 = p_2 & si\ x_2 \leqslant x < x_3 \\ \vdots & \\ F_X(x) = 1 & si\ x_n \leqslant x \end{cases}$$

Ainsi F_X est une **fonction constante par morceaux** (aussi appelée **fonction en escalier**).

Exercice 6

On lance deux fois un dé équilibré.
On définit X la variable aléatoire qui donne la somme des deux numéros obtenus.
On définit Y la variable aléatoire qui donne le maximum des deux numéros obtenus.

1. Déterminer $X(\Omega_1)$, la loi de X puis tracer la représentation graphique de la fonction de répartition F_X.
2. Même question pour la variable aléatoire Y.

La fonction de répartition : un élément essentiel à l'étude des V.A.R
Cette fonction contient toute l'information caractérisant la variable aléatoire X.
En effet, si X est une V.A.R. telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ alors :

$$\forall i \in [\![2, n]\!], \qquad P(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$$

Ainsi, connaître les valeurs de F_X aux points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ permet de déterminer la loi de X.

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X, Y deux V.A.R telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1, \ldots, 2n\}$ et :

$$\forall k \in \{1, \ldots, 2n\}, \qquad P(X > k) = 1 - \frac{k}{2n} \qquad P(Y > k) = \begin{cases} 1 - \dfrac{k}{2n} & \text{si } k \text{ est pair} \\ \\ 1 - \dfrac{k - \frac{1}{2}}{2n} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

Déterminer les lois de probabilités de X et de Y.

Exercice 8

On tire simultanément deux boules au hasard d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On appelle S la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus. Déterminer, pour tout k de $[\![1, n]\!]$, la probabilité $P(S \leqslant k)$ puis donner la loi de S.

IV Espérance et variance d'une V.A.R. finie

IV.1 - Espérance mathématique

Définition 4

Soit X une V.A.R de loi $\{(x_i, p_i), 1 \leqslant i \leqslant n\}$.
On appelle **espérance mathématique** (ou moyenne) de X le nombre réel :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Exemple 4

Un sac contient 3 boules numérotées de 1 à 3.
On effectue deux tirages avec remise et X est la V.A.R donnant la somme des résultats.

1. Donner la loi de X.
2. Calculer l'espérance de X.

Exercice 9

On lance une pièce de monnaie équilibrée trois fois de suite. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de « face »obtenus et soit Y la variable aléatoire prenant la valeur 1 si deux côtés identiques apparaîssent successivement et 0 sinon.
Déterminer les loi de X et Y puis leurs espérances.

Exercice 10

X est une V.A.R telle que $X(\Omega) = [\![2; n]\!]$ et pour tout k,

$$P(X = k) = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \binom{k-1}{n-1}$$

Vérifier que X défini bien une variable aléatoire et calculer $E(X)$.

Proposition 3

1. S' il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $X(\Omega) \subset [a, b]$ alors $a \leqslant E(X) \leqslant b$.
2. **Positivité** - Soit X une V.A.R. positive c'est à dire, $\forall w \in \Omega, X(\omega) \geqslant 0$, alors $E(X) \geqslant 0$.
3. **Linéarité de l'espérance**. Soient X, Y deux V.A.R sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$(i)\ E(aX + b) = aE(X) + b \qquad (ii)\ E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Exemple 5

On reprend l'expérience ci-dessus.
Le gain algébrique du joueur correspond au double de la différence entre la somme des deux dés lancés et 4. Pour chaque tirage, Y représente le gain algébrique du joueur.
Exprimer Y en fonction de X puis calculer $E(Y)$.

Définition 5 : *Variable centrée*

1. Une V.A.R finie X est dite **centrée** si $E(X) = 0$.
2. Soit X une V.A.R finie. La variable $Y = X - E(X)$ est appelée variable aléatoire centrée associée à X.

IV.2 - Variance d'une V.A.R finie

Définition 6

Soit X une V.A.R de loi $\{(x_i, p_i), 1 \leqslant i \leqslant n\}$.
On appelle :

- Moment d'ordre 2 le nombre réel $E(X^2)$.
- Variance de X le nombre réel :

$$Var(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i = E[X - E(X)]^2$$

- Ecart-type de X :

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Remarque 2

Pour les V.A.R finie le problème d'existence de ces quantités ne se pose pas. Cependant, on verra dans le cas de V.A.R discrète infinies que l'espérance, le moment d'ordre 2 ou la variance d'une variable aléatoire n'existe pas nécessairement.

Proposition 4

- Soit X une V.A.R finie alors :

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

- Soit X une V.A.R finie et $a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

Définition 7 : *Variable réduite*

- Soit X une V.A.R finie. On dit qu'elle est réduite si $Var(X) = 1$.
- Soit X une V.A.R finie. La variable $Y = \dfrac{X}{\sigma(X)}$ est appelée variable aléatoire réduite associée à X.

V Fonction d'une V.A.R. finie

Soit X une V.A.R finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On peut définir la V.A.R. $f(X)$ par :

$$f(X) : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & f(X(\omega)) \end{array}$$

☞ $Y = f(X)$ est une V.A.R finie telle que $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\} = \{f(x_i),\ x_i \in X(\Omega)\}$.
☞ **Loi de** $f(X)$. On obtient la loi de Y à partir de celle de X car pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, on a :

$$P(Y = y_k) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n, f(x_i) = y_k} P(X = x_i)$$

Proposition 5 : *« Théorème du transfert-Espérance de $f(X)$ »*

$$E(f(X) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) P(X = x_i)$$

Il n'est pas nécessaire de connaître la loi de $f(X)$ pour calculer son espérance. Il suffit de connaître celle de X.

Exemples 6

- Soit X une V.A.R finie telle que $X(\Omega) = \{-1; 0; 1; 2\}$ et dont la loi de probabilité est :

$$P(X = -1) = \frac{1}{8} \qquad P(X = 0) = \frac{1}{4} \qquad P(X = 1) = \frac{3}{8} \qquad P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

  Soit la V.A.R. Y définie par $Y = \dfrac{1}{X+2}$, alors $Y(\Omega) = \{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}\}$ et

$$E(Y) = \frac{1}{8} \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8} + \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$$

- Un joueur lance successivement deux fois un dé équilibré. On note X la variable aléatoire égale à la différence du premier lancer et du deuxième lancer. On pose $Y = |X|$. Déterminer $E(X)$ de deux manières différentes.

Exercice 11

Une urne contient deux boules blanches et 4 boules noires.
On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à obtenir la première boule blanche.
Soit B le nombre de tirages nécessaires.
Expliciter la loi de B, son espérance et sa variance.