## Chapitre 6

# Systèmes linéaires

# I - Résolutions des systèmes linéaires

## I.1 - Vocabulaire

**Définition 1**

On appelle *système linéaire* $(S)$ de $n$ équations à $p$ inconnues un système d'équations de la forme

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{1p}\,x_p & = & b_1 & (L_1) \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{2p}\,x_p & = & b_2 & (L_2) \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & (L_i) \\ a_{n1}\,x_1 & + & a_{n2}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{np}\,x_p & = & b_n & (L_n) \end{array}\right.$$

où les $a_{ij}$ sont des nombres réels fixés appelés **coefficients du système** et les $(b_i)_{i=1,\ldots,n}$ sont des réels fixés qui constituent le **second membre** du système. Les $x_1,\ldots,x_p$ sont les $p$ **inconnues** du sytème.

Par commodité, chaque équation est repérée par un nom : $L_i$ pour $i$-ème ligne.

Une solution du système est un **p-uplet** $(x_1;x_2;\cdots;x_p)$ pour lesquels toutes les équations sont vérifiées.

Résoudre le système $(S)$, c'est trouver l'ensemble des solutions de ce système.

**Exercice 1**

Résoudre les trois systèmes suivants :

**1)** $\left\{\begin{array}{cccc} x & + & y = & 1 \\ x & - & y = & 1 \end{array}\right.$ **2)** $\left\{\begin{array}{cccc} x & + & y = & 1 \\ x & + & y = & 2 \end{array}\right.$ **3)** $\left\{\begin{array}{cccc} x & + & y = & 1 \\ x & + & y = & 1 \end{array}\right.$

**Définition 2**

Un système est dit :

- **compatible** lorsqu'il admet au moins une solution, **incompatible** s'il n'en admet aucune.
- **homogène** lorsque le second membre est consitué uniquement de coefficients nuls. On appelle **système homogène associé** à un système $(S)$ le système obtenu en gardant les mêmes coefficients et en remplaçant le second membre par des 0.
- **de Cramer** lorsque $n=p$ et lorsque le système possède une unique solution.
- **triangulaire** lorsqu'il est de la forme : $\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n = b_1 \\ & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n = b_2 \\ & & & & \ddots & & \vdots \quad = \\ & & & & & & a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right.$

Enfin, deux systèmes sont dits **équivalents** lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.

**Exercice 2**

Justifier qu'un système homogène est compatible. Quel est l'ensemble des solutions d'un système homogène de Cramer d'inconnues $(x_1;\cdots;x_n)$ ?

## I.2 - Lien avec les matrices

**Proposition 1**

Soient $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$. Alors, $(x_1; x_2; \cdots; x_n)$ est une solution du système $(S)$ si et seulement si $AX = B$.

**Exercice 3**

Vérifier que la propriété précédente est vraie pour les systèmes de l'exemple 1.

**Proposition 2**

Un système est de Cramer si et seulement si la matrice associée $A$ est inversible. Dans ce cas, l'unique solution du système est donnée par $X = A^{-1}B$.

**Exercice 4**

Vérifier que la propriété précédente est vraie pour les systèmes de l'exemple 1.

**Remarque 1**

On a donc une première méthode pour résoudre les systèmes de Cramer : trouver l'inverse de la matrice $A$ puis l'unique solution du système par la formule ci-dessus. C'est la bonne méthode lorsqu'on a déjà calculé l'inverse de la matrice $A$ dans une question précédente.

Cependant, ce n'est pas, en général, la méthode la plus rapide (en fait, calculer l'inverse de $A$ revient en quelque sorte à résoudre le système avec tous les seconds membres possibles alors qu'il suffirait de le résoudre pour seul).

De plus, la résolution des systèmes qui ne sont pas de Cramer (notamment si $A$ n'est pas inversible) ne peut se faire ainsi.

Nous allons à présent décrire une méthode systématique (c'est à dire un algorithme) qui permet de résoudre tous les systèmes linéaires, appelée **algorithme du pivot de Gauss**. Ce n'est pas la seule méthode, mais c'est sans doute la moins fastidieuse dès que le système est un peu gros (disons à partir de 3 équations à 3 inconnues).

Plusieurs variantes de cette méthode existe (il existe notamment un algorithme total et un algorithme partiel).

## I.3 - Algorithme du pivot de Gauss

L'idée est de résoudre le système en combinant des lignes pour éliminer des coefficients, car ce genre d'opérations permet toujours de se ramener à un système équivalent à celui de départ.

**Proposition 3**

Les opération suivantes conduisent à un système équivalent au système précédent :

1. $L_i \leftrightarrow L_j$ : échanger les lignes $i$ et $j$.
2. $L_i \leftarrow aL_i$ où $a \in \mathbb{R}^*$ : multiplier la ligne $i$ par $a$.
3. $L_i \leftarrow L_i + bL_j$ où $i \neq j$, $b \in \mathbb{R}^*$ : ajouter $b$ fois la ligne $j$ à la ligne $a$.
4. $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$ où $i \neq j$, $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}^*$ : remplacer $L_i$ par $aL_i + bL_j$.

**Méthode 1 :** *Algorithme du pivot de Gauss (total)*

Pour résoudre le système $(S)$ :

1. on rédige « résolvons le système par la méthode du pivot de Gauss »
2. on écrit les matrice $A$ et $B$ côte à côte.
3. on choisit parmi les coefficients **non nuls** de $A$ un coefficient $a_{ij}$, appelé le **pivot**, que l'on entoure, dans une ligne et une colonnes qui ne contiennent pas d'autre pivot. Si c'est impossible on passe à l'étape 6
4. on réécrit le tableau après avoir effectuer les opérations $L_k \leftarrow L_k - \dfrac{a_{kj}}{a_{ij}} L_i$ ou bien $L_k \leftarrow a_{ij} L_k - a_{kj} L_i$ pour tout $k \neq i$ et on indique les opérations effectuées
5. on reproduit l'étape 3
6. On conclut en fonction de la situation :
   (a) si tous les coefficients d'une ligne sont nuls, sauf son second membre : le système n'a pas de solution.
   (b) sinon, toutes les inconnues dans les colonnes sans pivot sont des **paramètres**, et peuvent prendre n'importe quelle valeur dans $\mathbb{R}$. On écrit le système correspondant au tableau final avec les inconnues, et on exprime les solutions en isolant les inconnues des colonnes à pivot.

**Remarque 2**

Une méthode alternative, (algorithme partiel du pivot de Gauss), consiste à n'effectuer l'étape 4 que pour les lignes sans pivot. On obtient dans l'étape 6b un système que l'on résout par des substitutions simples.

Le **bon choix des pivots est fondamental** pour alléger les calculs. On choisira en priorité les pivots dans des colonnes contenant le plus de termes nuls possibles. De plus, il faut toujours privilégier les pivots les plus simples, les coefficients égaux à 1 étant l'idéal.

On peut s'écarter légèrement de cette algorithme pour :

- simplifier une ligne avec l'opération $L_i \leftarrow \dfrac{1}{\lambda} L_i$ (cela permet par exemple d'obtenir un pivot égal à 1).
- conclure directement que le système est incompatible lorsque deux lignes sont manifestement contradictoires.
- supprimer une ligne identique (ou proportionelle) à une autre.
- trouver une combinaison qui trivialise la résolution.

**Exercice 5**

1. Résoudre les systèmes suivants à l'aide d'un algorithme du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} 3x+2y=4 \\ x-y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x+2y=4 \\ x-y=1 \\ 4x+y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x+2y=4 \\ x-y=1 \\ 4x+y=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=1 \\ 2x-2y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x+3y=1 \\ x+2y=4 \\ 3x+10y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x+y+z=2 \\ x-y+z=0 \\ 3x+2y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=1 \\ y-z=2 \\ z-x=3 \end{cases}$$

2. Résoudre successivement les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \end{cases}, \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-3y+z=0 \end{cases}, \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-3y+z=0 \\ 3x-7y+z=-1 \end{cases}, \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-3y+z=0 \\ 3x-7y+z=-1 \\ x-y+2z=0 \end{cases}, \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-3y+z=0 \\ 3x-7y+z=-1 \\ x-y+2z=0 \\ -4y-5z=2 \end{cases}$$

# II - Pivot de Gauss et inverse d'une matrice

## II.1 - Caractérisation des matrices inversibles et pivot de Gauss

La proriété suivante, admise, permet de caractériser les matrices inversibles à l'issue de l'algorithme du pivot de Gauss, effectué sur la matrice sans l'augmenter d'un second membre.

**Proposition 4**

Le nombre de pivots obtenus dans la résolution d'un système par la méthode de Gauss (qu'elle soit totale ou partielle) ne dépend pas du choix des pivots. Ce nombre est appelé le **rang du système** ou le **rang de la matrice**. Un système est de Cramer lorsqu'il y a autant de pivot que d'inconnue et d'équation.

Par conséquent, une matrice carrée de taille $n$ est inversible si et seulement si on a $n$ pivot à l'issue d'un algorithme du pivot de Gauss

**Exercice 6**

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

**Remarque 3**

Si la question est uniquement de savoir si une matrice est inversible ou non, il est alors beaucoup plus économique en terme de calcul de ne faire qu'un algorithme partiel.

**Proposition 5**

Un matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses termes diagonaux sont non nuls

## II.2 - Détermination de l'inverse d'une matrice par la méthode du pivot de Gauss

On considère une matrice $A$ carrée de taille $n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) dont on sait qu'elle est inversible.

**Méthode 2**

Pour calculer $A^{-1}$ on appliquant l'algorithme du pivot de Gauss total sur la matrice $A$ avec comme second membre $\mathrm{Id}_n$, en le prolongeant jusqu'à obtenir la matrice identité à la place de $A$. La matrice obtenue à la place de $\mathrm{Id}_n$ est alors $A^{-1}$.

**Exercice 7**

1. Vérifier que $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et l'inverser par par la méthode du pivot de Gauss.
2. Retrouver tous les résultats sur les matrices carrée de taille 2 en appliquant cette méthode.