Analyse - Chapitre 1

Suites Classiques - Récurrence - Sommes

I - Généralités sur les suites

Définition 1

Une suite réelle est une fonction d'une partie A de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

$$u: \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) := u_n \end{array}$$

Remarque 1

- l'intervalle de définition peut donc être $\mathbb{N}$.
- Notation u_n et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Différents procédés peuvent être utilisés pour définir une suite :

1. **Expression du type :** $u_n = f(n)$

Exemple 1

La suite de terme général $\dfrac{1}{n(n-1)(n-2)}$ qui n'est définie qu'à partir du rang $n = 3$, donc on la note $\left(\dfrac{1}{n(n-1)(n-2)}\right)_{n\geqslant 3}$.

En moins concis, cette suite est $\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{24}, \dfrac{1}{60}, \cdots, \dfrac{1}{n(n-1)(n-2)}, \cdots\right)$.

Exercice 1

(a) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par $u_n = 2^{-n}$. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3.

(b) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n par $v_n = n^2 + 2n$. Exprimer, pour tout entier n, v_{n+1} en fonction de n.

2. **Définition par récurrence à un terme : expression du type** $u_{n+1} = f(u_n)$

Exemple 2

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = -\dfrac{1}{5}$ et pour tout entier non nul n, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n + 1}$.
Déterminer u_1, u_2, u_3 ?

3. **Autre type de définition par récurrence : en voici trois exemples**

Exemple 3

(a) On définit une suite en posant :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

(b) On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 2u_n - 3 + n^2 - n - 4$.

(c) On définit un couple $(u_n, v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de suites par

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ v_0 = 4 \end{cases} \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{cases}$$

4. **De manière implicite**

Exercice 2

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

(a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n.

(b) Calculer u_1 et u_2.

(c) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in \left]0, \dfrac{2}{3}\right[$.

II - Propriétés des suites

Définition 2 : *Sens de variation d'une suite réelle :*

Dire que la suite (u_n) est

- **croissante** signifie que pour tout entier n, $u_{n+1} \geqslant u_n$,
- **décroissante** signifie que pour tout n, $u_{n+1} \leqslant u_n$,
- **monotone** signifie qu'elle est croissante ou décroissante.

Lorsque les inégalités sont strictes ont dit que la suite est strictement croissante ou décroissante ou monotone.

Remarque 2

exemples graphiques de suites monotones ou pas.

Cas de la suite de terme général $(-1)^n$.

Méthode 1 : *Sens de variation d'une suite*

Voici plusieurs méthodes pour déterminer le sens de variation d'une suite.

- On peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- Si la suite est *strictement positive*, on peut étudier la position de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1.

Exercice 3

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n) définie par : pour tout entier n, $u_n = n^2 + 1$.
2. Soit la suite (v_n) définie par : pour tout entier n, $v_n = -(n+2)(n-10)$. Montrer que cette suite est décroissante à partir du rang, $n = 4$.

Exercice 4

Étudier la monotonie des suites suivantes définies pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n!}{2^n} \\ v_n &= \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\right) - n\sqrt{n} \\ w_n &= \prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i} \end{aligned}$$

Définition 3 : *Encadrement d'une suite*

Dire qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

- **majorée** signifie que : il existe un nombre réel M qui vérifie, pour tout entier n, $u_n \leqslant M$
- **minorée** signifie que : il existe un nombre réel m qui vérifie, pour tout entier n, $u_n \geqslant m$,
- **bornée** signifie qu'elle est à la fois majorée et minorée

III - Raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence est incontournable, en particulier dans l'étude de certaines suites. On peut essayer de l'utiliser à chaque fois que l'on doit démontrer une affirmation telle que « pour tout entier $n \geq 1$, $P_(n)$ est vraie », $P_(n)$ étant une propriété qui dépend de l'entier n. Par exemple :

Exercice 5

Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$

Théorème 1 : *Principe de récurrence*

Soit $\mathscr{P}(n)$ une propriété, appelée *hypothèse de récurrence*, définie pour tous les entiers n. Si elle vérifie

(1) $\mathscr{P}(0)$ est vraie,

(2) pour tout entier naturel n, la véracité de $\mathscr{P}(n)$ implique celle de $\mathscr{P}(n+1)$,
alors $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Méthode 2 : *Rédaction d'un raisonnement par récurrence*

Lorsque l'on applique le principe de récurrence, il est impératif de n'oublier aucun des quatre points suivants :

- *L'hypothèse de récurrence :* énoncer clairement $P(n)$;
- *Initialisation :* vérifier que $P(0)$ est vraie (en général, c'est facile) ;
- *Hérédité :* démontrer que pour tout $n \geqslant 0$, $P(n)$ implique $P(n+1)$. Pour cela, on commence par écrire une phrase telle que :
  « Soit n un entier. Supposons $P(n)$ est vraie, et montrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie » ;
- *Conclusion :* on écrira par exemple « Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$ ».

Exercice 6

Montrer que pour tout entier naturel n, $2^n \geqslant n+1$

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ \forall n \geq 1,\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

1. Calculer les premiers termes de la suite (jusqu'à u_6).
2. Conjecturer une expression du terme général u_n en fonction de n
3. Démontrer cette conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exercice 8

Montrer que pour tout réel positif α et tout entier naturel n, $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$.

Du principe de récurrence décrit ci-dessus, se déduit un autre type de récurrence :

Théorème 2 : *Principe de récurrence double*

Soit $\mathscr{P}(n)$ une propriété définie pour tous les entiers n. Si elle vérifie

(1) $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies,

(2) pour tout entier naturel n, la véracité des propriétés $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ implique celle de $\mathscr{P}(n+2)$, alors $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 9

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} & u_0 = 0 \\ & u_1 = 1 \\ \text{pour tout entier } n & u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$

Montrer que pour tout entier n, $u_n = 3^n - 2^n$.

IV - Utilisation du symbole $\sum$

Soient p un entier non nul et $u_1, u_2, \dots, u_p$ des réels. La somme :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_p$$

se note aussi :

$$\sum_{n=1}^{p} u_n$$

☞ Dans cette notation, la lettre n peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre non déjé utilisée. On dit que c'est une lettre *muette*. On peut donc écrire, par exemple :

$$\sum_{n=1}^{p} u_n = \sum_{i=1}^{p} u_i = \sum_{k=1}^{p} u_k$$

Proposition 1 : *propriétés du symbole* $\sum$

Les égalités qui suivent sont vraies sans condition sur les variables qui y figurent.

$$\sum_{k=1}^{p}(u_k+v_k) = \sum_{k=1}^{p} u_k + \sum_{k=1}^{p} v_k \tag{3.1}$$

$$\sum_{k=1}^{p}\lambda u_k = \lambda\sum_{k=1}^{p} u_k \tag{3.2}$$

$$\sum_{k=1}^{p} 1 = p \tag{3.3}$$

☞ : Que vaut $\sum_{k=0}^{n} 1$?

Outre les propriétés précédentes, il faut savoir effectuer des *changements d'indice* tels que :

$$\sum_{k=1}^{p} u_k = \sum_{k=0}^{p-1} u_{k+1} = \sum_{k=2}^{p+1} u_{k-1} = \cdots$$

Exercice 10

Vérifier que pour tout entier $i \geq 1$:

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

En déduire une formule simple pour la somme suivante :

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{i(i+1)}$$

Trois sommes à connaître :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Exercice 11

Simplifier la somme suivante :

$$\sum_{i=0}^{n-1}(2i+1)$$

V - Quelques suites particulières

V.1 - Suites arithmétiques

Définition 4

Une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dite **arithmétique** s'il existe une constante $r \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
La constante r de la définition s'appelle *la raison* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite arithmétique de raison r, alors on peut exprimer u_n en fonction de n, d'après la proposition suivante.

Proposition 2

Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite arithmétique et r sa raison.
Alors, pour tout entier n, $u_n = u_0 + nr$.

Remarque 3

Dans la proposition ci-dessus, le premier terme de la suite est u_0. Dans le cas où le premier terme est u_1, le résultat devient : pour tout entier non nul n, $u_n = u_1 + (n-1)r$.
Si le premier terme est u_2, ...

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite arithmétique. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

☞ Et que vaut $\sum_{k=p}^{n} u_k$?

Exercice 12

Calculer de tête les sommes suivantes :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 200$$
$$1 + 3 + 5 + \cdots + 199$$
$$5 + 3 + 1 - 1 - \cdots - 11$$

Méthode 3 : *Comment montrer qu'une suite est arithmétique ?*

Il suffit de montrer que pour tout entier n, le réel $u_{n+1} - u_n$ ne dépend pas de n.

Exemple 4

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout entier naturel n, $u_n = 5 + 3n$ est une suite arithmétique. Montrez-le !

V.2 - Suites géométriques

Définition 5

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels est dite *géométrique* s'il existe un réel q tel que $u_{n+1} = qu_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. La constante q de la définition s'appelle *la raison* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Comme pour les suites arithmétiques, il existe une formule simple donnant u_n en fonction de n et de u_0 :

Proposition 3

Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite géométrique et q sa raison. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 q^n$.

Encore une somme classique :

Soit q un réel $\neq 1$. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Remarque 4

Dans la proposition ci-dessus, le premier terme de la suite est u_0. Dans le cas où le premier terme est u_1, le résultat devient : pour tout entier non nul ...

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite géométrique de raison q. On suppose $q \neq 1$. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

Exercice 13

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ lorsque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite géométrique de raison 1.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{i=2}^{n+1} 2^i$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+3} \frac{2^{k+1}}{3^k}$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite géométrique. On note r sa raison. Exprimer, à l'aide de u_0 et r, le produit :

$$u_0 u_1 u_2 \cdots u_n = \prod_{i=0}^{n} u_i$$

   à l'aide u_0 et r.

V.3 - Suites arithmético-géométriques

Définition 6

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels est dite *arithmético-géométrique* s'il existe deux réels a, b tel que $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

☞ Les suites arithmétiques ou géométriques sont des suites arithmético-géométriques particulières.

Méthode 4 : *Plan d'étude des suites arithmético-géométrique*

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique, vérifiant :

$$\forall n \geqslant 0, u_{n+1} = au_n + b$$

alors il est possible d'exprimer simplement u_n en fonction de n. La méthode est la suivante :

1. on cherche un réel ℓ tel que $\ell = a\ell + b$;
2. on vérifie que la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \ell$ est géométrique ;
3. on en déduit une formule simple pour v_n puis pour u_n.

Exemple 5

Considérons la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$$

On reconnait une suite arithmético-géométrique. On cherche alors un réel ℓ tel que :

$$\begin{aligned} 3\ell + 2 = \ell \quad &\Leftrightarrow \quad 2\ell = -2 \\ &\Leftrightarrow \quad \ell = -1 \end{aligned}$$

Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = u_n - \ell = u_n + 1$. Vérifions que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 1 \\ &= 3u_n + 2 + 1 \\ &= 3(u_n + 1) \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison 3. On sait alors que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 3^n = (u_0 + 1)3^n = 3^n$$

Et on conclut en écrivant :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = v_n - 1 = 3^n - 1$$

Exercice 14

Exprimer u_n en fonction de n dans les cas suivants :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = -u_n + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 5u_n + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = -4u_n - 1 \end{cases}$$

Exercice 15

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 4 \end{cases}$$

Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la somme $\sum_{i=0}^{n} u_i$.

V.4 - Suite à double récurrence linéaire

Définition 7

On appelle suite à **double récurrence linéaire** toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de la forme :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des constantes}$$

☞ Dans une suite à double récurrence linéaire, chaque terme se calcule à partir des deux précédents. En particulier, si on connait les deux premiers termes de la suite, alors on peut en calculer tous les termes, de proche en proche. Comme on va le voir, il est en fait possible d'exprimer simplement u_n en fonction de n.

Méthode 5 : *Plan d'étude d'une suite à double récurrence linéaire*

L'objectif est d'obtenir une expression explicite du terme général u_n en fonction de n.

1. On forme **l'équation caractéristique** (de degré 2) attachée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$x^2 - ax - b = 0$$

2. On résout cette équation en utilisant Δ,
3. On se réfère au résultat ci-dessous

Proposition 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à double récurrence linéaire.

Cas 1 Si l'équation caractéristique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a deux racines réelles distinctes x_1 et x_2, c'est-à-dire si $\Delta > 0$, alors il existe deux réels c et d tels que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = cx_1^n + dx_2^n$$

Cas 2 Si l'équation caractéristique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une racine double x_0, c'est-à-dire si $\Delta = 0$, alors il existe deux réels c et c tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (c + nd)x_0^n$$

Dans les deux cas, on peut déterminer c et d connaissant u_0 et u_1.

☞ On admettra cette proposition sans démonstration (on y reviendra quand on verra les matrices). Dans le cas où l'équation caractéristique n'admet pas de racine réelle, autrement dit lorsque $\Delta < 0$, on peut encore exprimer simplement u_n en fonction de n, mais il faut faire appel à la trigonométrie ou bien aux nombres complexes. Ce n'est donc pas au programme.

Exemple 6

On définit une suite en posant :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{array}\right.$$

On reconnait une suite à double récurrence linéaire. Son équation caractéristique est :

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

Les racines de cette équation sont $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$. D'après la proposition, il existe donc deux réels c et d tels que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = c1^n + d2^n = c + d2^n$$

Il nous reste à déterminer c et d.

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} c + d = 0 \\ c + 2d = 1 \end{array}\right.$$

On trouve $c = -1$ et $d = 1$, ce qui permet de conclure :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n = -1 + 2^n$$

Exercice 16

Dans chaque cas, exprimer u_n en fonction de n :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n \end{array}\right.$$