Chapitre 9

Probabilité sur un ensemble fini

I - Le langage des probabilités

I.1 - Expériences aléatoires et univers

Définition 1

On appelle **expérience aléatoire** toute expérience dont on ne peut prédire avec certitude le résultat.
L'étude d'une expérience aléatoire commence par la description des résultats possibles,appelés **issues** ou **éventualités**.
L'ensemble des résultats possibles est appelé **univers des possibles**. On le note en général Ω.

Méthode 1 : *Modélisation*

L'énoncé d'un exercice de probabilité ne précise pas l'univers des possibles. C'est à vous qu'il revient de *décrire* l'ensemble des résultats possibles. Cette étape s'appelle la **modélisation**. Voici quelques exemples d'espaces probabilisés finis :

Expérience 1 : On lance un dé cubique à 6 face et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure. Les résultats possibles sont 1,2,3,4,5 ou 6. Donc $\Omega = [\![1,6]\!]$.

Expérience 2 : On lance deux dés discernables (un rouge et un bleu par exemple) et on note les numéros obtenus. Dans ce cas, les résultats possibles sont les couples (1,1), (1,2),...,(2,1),(2,2),2,3) ...,(6,5), (6,6). Donc $\Omega = [\![1,6]\!]^2$.

Expérience 3 On lance un pièce de monnaie : les issues sont pile ou face.

Expérience 4 On choisit au hasard 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Le résultat est une partie à 5 éléments de l'ensemble des 32 cartes.

Expérience 5 On lance un dé et on regarde le résultat obtenu. Si ce résultat est 6, on arrête, sinon on relance le dé. On répète le processus jusqu'à obtenir 6 et on note le nombre de coups nécessaires. Il est possible d'avoir 6 au premier coup, mais il est possible que le 6 n'arrive qu'au 7ème ou au 100ème coup, voire au 1000ème. Il est théoriquement possible que le premier 6 ne sorte qu'au n-ième coup, pour n'importe quel entier naturel n. Ainsi $\Omega = \mathbb{N}$. On peut donc tout à fait avoir un univers infini.

Expérience 6 On choisit au hasard un réel entre 0 et 1. $\Omega = [0,1]$. En Scilab cette expérience sera réalisée via la fonction *rand()*.

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On lance n fois une pièce de monnaie. Quel est l'univers des possibles ? Combien comporte-t-il d'élèments ?
2. On joue a l'Euromillion. On doit pour cela cocher 5 cases d'une grilles comportant les numéros de 1 à 50 puis cocher deux étoiles parmi 11.
   Quel est l'univers des possibles ? Combien comporte-t-il d'éléments ?

I.2 - Evénements aléatoires

Définition 2

Un **événement aléatoire** est un fait qui peut se produire ou non suivant le résultat de l'expérience aléatoire. On le représente par l'ensemble des issues qui le réalisent. Il s'agit donc d'une partie de Ω. Une issue de l'expérience est appelée **événement élémentaire**.

Exemples 1

1. On effectue l'**expérience 1** (lancer d'un dé) et on considère l'événement A « le nombre obtenu est pair ». Cet événement est représenté par les issues 2,4 ou 6. On notera $A = \{2, 4, 6\}$.
2. Lorsque Ω est un ensemble fini, toute partie de Ω est un événement et tout élément de Ω est un événement élémentaire. Ainsi, Ω et $\emptyset$ sont des événements.

Exercice 2

On effectue l'**expérience 2** (lancer de deux dés). Décrivez les événements suivants :

- A « la somme des nombres obtenus est supérieure ou égal à 10 ».
- B « le produit des nombres obtenus est supérieur ou égal à 20 »

I.3 - Liens avec les opérations ensemblistes

L'identification entre événements et parties de Ω permet d'utiliser les opérations élémentaires ensemblistes pour traduire certains événements, ainsi, l'événement

- (A ou B) est modélisé par la réunion $A \cup B$
- (A et B) est modélisé par l'intersection $A \cap B$
- l'événement A n'est pas réalisé est modélisé par $\overline{A}$.

Bien entendu, il est possible de combiner ces opérations élémentaires pour décrire des événements plus complexes. Pour les comparer, il est alors souvent nécessaire d'appliquer les règles du calcul ensembliste (associativité, commutativité, distributivité, lois de Morgan) ou du calcul logique.

Méthode 2 : *Lois de Morgan*

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Exercice 3

Une expérience consiste à lancer deux pièces successivement. Le résultat est donné sous la forme d'un couple d'éléments de l'ensemble $\{P, F\}$, P symbolisant la pièce côté pile et F la pièce côté face. Notons E l'événement « la première pièce montre pile »et G l'événement « la deuxième piéce montre pile ».
Décrire les événements $E \cup G$, $E \cap G$, $\overline{E}$, $\overline{G}$, $\overline{E \cup G}$, $\overline{E} \cap \overline{G}$.

Exercice 4

On désigne par n un entier naturel non nul. Une épreuve consiste à lancer n fois une pièce. Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on note P_k l'événement « on obtient pile au k-ieme lancers »et on note A_n l'événement « on n'obtient que des pile pendant les n lancers »et B_n l'évènement « on obtient au moins une fois pile au cours des n lancers ».

1. Exprimer A_n à l'aide des P_k.
2. Exprimer B_n à l'aide des P_k.
3. Exprimer l'évènement « le premier pile apparaît au n-ieme ».

I.4 - Systèmes complets d'événements

Définition 3

Deux événements sont dits **incompatibles** lorsqu'il est impossible qu'ils soient réalisés simultanément.

Remarque 1

Si $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ et $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ sont deux événements,

$$A \text{ et } B \text{ sont incompatibles si et seulement si } A \cap B = \emptyset.$$

Exemple 2

Avec les notations de l'exercice 2, A et $\overline{B}$ sont incompatibles.

Définition 4

On dira qu'une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements forme un **système complet d'événements** si c'est une partition de Ω, c'est à dire si les A_i sont deux à deux incompatibles et recouvrent Ω.

- $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$
- pour tout $(i,j) \in I^2, A_i \cap A_j = \emptyset$, **si** $i \neq j$

Exemples 3

- dans l'**expérience 1**, les événements « le chiffre obtenu est pair », « le chiffre obtenu est 1 », « le chiffre obtenu est 3 », « le chiffre obtenu est 5 »forment un système complet d'événements.
- dans l'**expérience 2**, les événements « la somme des nombre obtenus est supérieure ou égale à 10 », et « la somme des nombre obtenus est strictement inférieure à 10 »forment un système complet d'événements.
- Plus généralement, pour tout événement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $(A, \overline{A})$ forme un système complet d'événement. En effet, à la suite d'une expérience aléatoire deux cas sont possibles :
  - soit A est réalisé,
  - soit $\overline{A}$ est réalisé

II - Probabilité sur un ensemble fini

Dans tout le chapitre Ω désigne un ensemble **fini** et non vide.

II.1 - Exemple fondamental : probabilité uniforme

Reprenons l'**expérience 1**. On lance un dé et on obtient un nombre $\omega \in [\![1,6]\!]$.
Imaginons que l'on répète un grand nombre de fois l'**expérience 1**. Si le dé est équilibré, on peut constater que la fréquence d'apparition de n'importe quel nombre entier entre 1 et 6 est proche de $\frac{1}{6}$. On fixera donc : $P(\{3\}) = \frac{1}{6}$.
De la même manière, considérons l'événement A « le nombre obtenu est pair », c'est à dire $A = \{2,4,6\}$. Comme A est une partie à 3 éléments de Ω qui ont chacun la probabilité $\frac{1}{6}$ de se réaliser, A a la probabilité $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ d'être réalisé. Ceci nous conduit à adopter la définition suivante :

Définition 5

On considère une expérience aléatoire pour laquelle l'univers est un ensemble fini, non vide et $A \in \mathscr{P}(\Omega)$.
On appelle **probabilité uniforme** sur Ω l'application qui à tout événement A de $\mathscr{P}(\Omega)$ associe le nombre $\frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$. Ainsi,

$$\begin{array}{rccc} P: & \mathscr{P}(\Omega) & \to & \mathbb{R}^+ \\ & A & \mapsto & \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} \end{array}$$

Remarque 2

Soit $\omega \in \Omega$. Par définition $P(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{card } \Omega}$. En particulier, toutes les issues ont le même probabilité. On dit qu'elles sont équiprobables.

Proposition 1

Soit Ω un ensemble fini non vide. L'application $P : \mathscr{P}(\Omega) \to \mathbb{R}^+$ définie ci-dessus vérifie :

1. $P(\Omega) = 1$
2. pour toute partie $A \in \mathscr{P}$
3. pour toutes parties $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$, si $A \cap B = \emptyset$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exercice 5

Les 28 tomes d'une encyclopédie sont *rangées au hasard* sur une étagère.

1. Quelle est la probabilité que les tomes I et II apparaissent côte à côte et dans cet ordre sur l'étagère ?
2. Quelle est la probabilité que les p premiers tomes $(1 \leqslant p \leqslant 28)$ apparaissent côte à côte et dans le bon ordre ?

II.2 - Notion de probabilité sur un ensemble fini

L'exemple de la probabilité uniforme est très « naturel »mais trop restrictif car on rencontre rapidement des expériences aléatoires pour lesquelles les événements élémentaires ne sont pas équiprobables : il suffit pour cela de mener l'**expérience 1** avec un dé truqué !
Il arrive aussi, que partant d'un univers où les événements élémentaires sont équiprobables on aboutisse à un nouvel univers pour lequel ce n'est plus le cas. (Considérons par exemple l' expérience : on lance deux dés et on note la somme des résultats obtenus.)

Définition 6 : *Probabilité*

Soit Ω un ensemble fini, non vide. On appelle **probabilité** sur Ω toute application $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :

1. $P(\Omega) = 1$
2. si A et B sont incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemples 4

1. La probabilité uniforme est une probabilité au sens de la définition ci-dessus.
2. Sur $\Omega = [\![2,12]\!]$, nous avons défini deux probabilités différentes :
   - la probabilité uniforme
   - la probabilité construite grâce à l'**expérience 2 bis**

On dit alors que $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ est un **espace probabilisé fini** et pour tout événement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on appelle **probabilité de** A le nombre $P(A) \in [0,1]$.

II.3 - Propriétés des probabilités finies

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Pour tous événements A et B de $\mathscr{P}(\Omega)$, les assertions suivantes sont vraies :

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$	2. $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	4. Si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$

Remarque 3

- On a en particulier $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0$.
- On peut généraliser la propriété 4) à une réunion de plusieurs événements.
  Par exemple, $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Exercice 6

On lance deux dés discernables et parfaitement honnêtes. Déterminer par 2 méthodes, la probabilité qu'au moins un des dés amène un point pair.

Proposition 2 : *- Définition : Loi de probabilité de P*

Si $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilisé fini, alors pour tout événement A,

$$P(A) = P(\{\omega; \omega \in A\}) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$$

En particulier si $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ alors

$$\sum_{k=1}^{n} P(\omega_k) = 1$$

Ainsi une probabilité P sur $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, se caractérise par les valeurs $(P(\omega_1), \ldots, P(\omega_n))$ ce qu'on appelle **loi de probabilité de** P.

Exemples 5

1. On lance un dé pipé. On définit une probabilité sur $\Omega = [\![1;6]\!]$ en posant :

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\} = P(\{4\}) = P(\{5\}) = \frac{1}{12}, P(\{6\} = \frac{1}{3}$$

2. Soit $\Omega = \{a, b, c, d\}$. On définit une probabilité sur Ω en posant :

$$P(\{a\}) = \frac{1}{2},\ P(\{b\}) = \frac{1}{4},\ P(\{c\}) = \frac{1}{4},\ P(\{d\}) = 0$$

Vocabulaire : on peut noter que les événements $\{b\}$ et $\{c\}$ ont même probabilité. On dit qu'ils sont **équiprobables**. L'événement $A = \{a, b, c\}$ a la probabilité 1 d'être réalisé.
On dit que A est **quasi-certain**. En revanche l'événement $\{d\}$ a la probabilité 0 d'être réalisé. On dit que $\{d\}$ est P-**négligeable**.

Exercice 7

On lance un dé pipé. On pose :

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\} = \frac{1}{6},\ P(\{4\}) = P(\{5\}) = \frac{1}{12},\ P(\{6\}) = \frac{1}{3}$$

1. Vérifier que P définit bien une probabilité sur Ω où $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. Notons E l'événement « le chiffre obtenu est pair »et F l'événement « le chiffre obtenu est supérieur ou égal à 4 ».
Déterminer la probablité de E, F, « le chiffre est impair », « le chiffre est pair et supérieur à 4 », « le chiffre est pair ou supérieur à 4 »et « le chiffre est impair et inférieur à 3 ».

Exercice 8

Un joueur lance une bille sur une planche percée de n trous numérotés de 1 à n ($n > 2$). La bille tombe toujours dans un trou (et dans un seul). La probabilité que la bille tombe dans le trou 1 est $\frac{1}{3}$, celle qu'elle tombe dans le trou numéro 2 est $\frac{1}{3^2}$ et plus généralement, celle du trou numéro k est $\frac{1}{3^k}$ (pour $1 \leqslant k < n$).
Quelle est alors la probabilité qu'elle tombe dans le trou numéro n ?

III - Probabilité conditionnelle

Lorsque l'on réalise successivement une ou plusieurs expériences aléatoires, on peut vouloir tenir compte dans une prévision, d'une information complémentaire. Imaginons par exemple qu'on lance un dé cubique équilibré. La probabilité d'obtenir un 6 est alors égale à $\frac{1}{6}$. Si maintenant, je tiens compte du fait que les faces du dés sont peintes en vert pour les chiffres pairs, et en rouge pour les impairs. La probabilité d'obtenir un 6 **sachant** que je vois que la face est verte est alors de $\frac{1}{3}$. Cette probabilité est **conditionnée** par la couleur de la face est une *probabilité conditionnelle*.

III.1 - Probabilité conditionnelle de A sachant B

Définition 7

Soient $\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ un événement non négligeable (ie $(P(B) > 0)$.
Pour tout événement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on définit la **probabilité conditionnelle de A sachant B** par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Proposition 3

Soient $\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et $B \subset \Omega$ un événement non négligeable (de probabilité non nulle). L'application :

$$\begin{array}{rccc} P_B : & \mathscr{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & P_B(A) \end{array}$$

qui à tout événement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ associe la probabilité conditionnelle de A sachant B, est une probabilité sur Ω.

Remarque 4

En particulier, cette probabilité conditionnelle P_B vérifie toutes les propriétés des probabilités que nous avons déjà établies :

1. $P_B(A) = 1 - P_B(\overline{A})$.
2. Si $A_1 \subset A_2$ alors $P_B(A_1) \leqslant P_B(A_2)$.
3. $P_B(A_1 \cup A_2) = P_B(A_1) + P_B(A_2) - P_B(A_1 \cap A_2)$.
4. Les formules du crible de Poincaré restent vrai en remplaçant P par P_B

Les probabilités conditionnelles sont notamment très utiles pour calculer la probabilité d'une intersection. Le corollaire suivant illustre cela :

Corollaire 1

Soit $\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé. Pour tous événements A et B tels que $P(B) > 0$,

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$$

Exercice 9

On conidère deux urnes $\mathscr{U}_1$ et $\mathscr{U}_2$ contenant chacune des boules blanches et noires. On suppose que :

- $\mathscr{U}_1$ contient 2 boules blanches et 3 boules noires.
- $\mathscr{U}_2$ contient 4 boules blanches et 2 boules noires.

On effectue l'expérience suivante :

- on tire au hasard une boule de l'urne $\mathscr{U}_1$, on note sa couleur.
- puis on met cette boule dans l'urne $\mathscr{U}_2$,
- on tire de nouveau au hasard une boule de l'urne $\mathscr{U}_2$ et on note sa couleur.

1. Quelle est la probabilité que les deux boules obtenues soient blanches ?
2. Quelle est la probabilité que les deux boules soient de couleur différentes ?

III.2 - Formule des probabilités composées

Comme nous venons de le voir, les probabilités conditionnelles sont particulièrement utiles pour calculer les probabilités de l'intersection de deux événements. Plus généralement pour calculer la probabilité de l'intersection de l'intersection d'une famille finie d'événements, nous disposons de la :

Proposition 4

Soient $\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'événements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$. Alors,

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times \cdots \times P_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Pour 3 événements, cette formule s'écrit :

Remarque 5

Cette formule est très intuitive. Si nous souhaitons calculer la probabilité que les événements A_1, A_2, A_3, ..., A_n, soient simultanément réalisés, il faut

tout d'abord que A_1 soit réalisé,

puis maintenant que l'on **sait que** A_1 **est réalisé**, il faut que A_2 soit réalisé.

puis maintenant que l'on **sait que** A_1 **et** A_2 **sont réalisés**, il faut que A_3 soit réalisé, etc...

En pratique : vous pouvez visualiser cette formule sur un arbre, comme dans l'exercice ci-après.

Exercice 10

On dispose de trois urnes contenant des boules blanches et noires.

- $\mathscr{U}_1$ contient 2 boules blanches et 3 boules noires
- $\mathscr{U}_2$ contient 4 boules blanches et 2 boules noires
- $\mathscr{U}_3$ contient 6 boules blanches et 1 boule noire.

On effectue trois tirages successifs suivant le même protocole que dans l'exercice précédent : la boule tirée dans une urne est remise dans la suivante.

- on tire au hasard une boule de l'urne $\mathscr{U}_1$, on note sa couleur.
- puis on met cette boule dans l'urne $\mathscr{U}_2$,
- on tire de nouveau au hasard une boule de l'urne $\mathscr{U}_2$ et on note sa couleur.
- puis on met cette boule dans l'urne $\mathscr{U}_3$,
- on tire de nouveau au hasard une boule de l'urne $\mathscr{U}_3$ et on note sa couleur.

Quelle est la probabilité pour que les trois boules tirées soient de la même couleur ?

III.3 - Formule des probabilités totales

Proposition 5 : *Formule des probabilités totales*

Soit $(\Omega, P(\Omega), P)$ un espace probabilisé.
Calcul de la probabilité d'un événement $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ qui dépend du résultat d'une situation antérieure :

- Pour 2 événements
  A et $\overline{A}$ forment un système complet d'événements (S.C.E). Si de plus $P(A) \neq 0$ et $P(\overline{A}) \neq 0$ on a :

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)P(\overline{A})$$

- Pour 3 événements
  Soit F, G, H un S.C.E. Si de plus $P(F) \neq 0$, $P(G) \neq 0$ et $P(H) \neq 0$:

$$P(B) = P(B \cap F) + P(B \cap G) + P(B \cap H) = P_F(B)P(F) + P_G(B)P(G) + P_H(B)P(H)$$

- Pour n événements
  Soit $(A_i)_{i \in I}$ un S.C.E., tel que $\forall i \in I,\ P(A_i) > 0$,

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i) \times P_{A_i}(B)$$

Exercice 11

On dispose de 4 urnes numérotées ;

- $\mathscr{U}1$ contient 4 boules blanches et 1 boule noire,
- $\mathscr{U}_2$ contient 3 boules blanches et 2 boules noires,
- $\mathscr{U}_3$ contient 2 boules blanches et 3 boules noires,
- $\mathscr{U}_4$ contient 1 boule blanche et 4 boules noires.

On effectue un tirage suivant le protocole suivant :

- On choisit une urne. On suppose que la probabilité de choisir l'urne $\mathscr{U}_i$ vaut $\dfrac{i}{10}$.
- On choisit alors au hasard une boule.

Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

III.4 - Formule de Bayes

Imaginez qu'on souhaite apprécier la fiabilité d'un test médical. On fait passer le test à une population de « cobayes humains ».
Notons M l'événement « l'individu est malade »et T l'événement « le test est positif ». En laboratoire, il est facile de déterminer :

1. la probabilité que le test soit positif sur un individu malade : $P_M(T)$
2. la probabilité que le test soit positif sur un individu sain : $P_{\overline{M}}(T)$
3. et la probabilité d'être malade $P(M)$.

La question qui se pose avant de lancer le test sur le marché c'est de connaître la probabilité qu'un individu soit malade sachant que son test est positif, c'est à dire $P_T(M)$.
Pour répondre à cette question, il faut en quelque sorte *retourner le conditionnement*.

Proposition 6 : *Formule de Bayes*

Soit $(\Omega, P(\Omega), P)$ un espace probabilisé.

❶ Version simple :
Soient A et B deux événements de probabilité non nulle. On a alors :

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)} = \frac{P_A(B)P(A)}{P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)P(\overline{A})}$$

❷ Version générale :
Soit $(A_i)_{i\in I}$ un S.C.E., tel que $\forall i \in I,\ P(A_i) > 0$. Soit $B \in \Omega$ de probabilité non nulle.
Pour tout $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$, on a :

$$P_B(A_{i_0}) = \frac{P(A_{i_0} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_{i_0})P_{A_{i_0}}(B)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)}$$

Exercice 12

Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1%.
Que penser de ce test ?

Exercice 13

Reprenez l'exercice 10. On suppose que la boule tirée est blanche. Quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de l'urne $\mathscr{U}_1$?

IV - Indépendance en probabilité

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et A, B deux événements. *Intuitivement*, on dira que A et B sont *indépendants* si la réalisation de B ne change rien pour celle de A et inversement.

Définition 8

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.
Deux événements A et B sont dits **indépendants pour la probabilité** P si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

En particulier, si $P(B) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$

Remarque 6

Contrairement à l'idée intuitive que nous pouvons en avoir, deux événements peuvent être ou non indépendants selon la probabilité qui équipe Ω. Cependant, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la probabilité P, on dira simplement que A et B sont indépendants.

Exemple 6

On effectue l'**expérience 1**. on munit $\Omega = [\![1, 6]\!]$ de deux probabilités :

- P_1 est la probabilité uniforme sur Ω
- P_2 est la probabilité « dé pipé »définie par :

$$P_2(6) = \frac{1}{3}, \quad , P_2(5) = P_2(4) = \frac{1}{6} \text{ et } P_2(1) = P_2(2) = P_2(3) = \frac{1}{9}.$$

On considère les événements $A = \{4, 5\}$ et $B = \{5, 6\}$ de sorte que $A \cap B = \{5\}$.
A et B sont-ils indépendants pour la probabilité P_1 ? Et pour la probabilité P_2 ?

Exercice 14

On considère une famille avec des enfants. On suppose qu'il y a équiprobabilité de la répartition des sexes.

1. On suppose qu'il y a deux enfants. Etudiez l'indépendance des événements :
   - A « la famille a des enfants des deux sexes ».
   - B « la famille a au plus un garçon »
2. On suppose que la famille compte trois enfants. Etudiez l'indépendance des événements A et B définis ci-dessus.

Proposition 7

Soient $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et A, B deux événements **indépendants pour la probabilité P**, alors

1. les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants.
2. les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.
3. les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Remarque 7

Intuitivement, on pourrait penser que deux événements incompatibles sont indépendants. il n'en est rien, bien au contraire : si A et B sont deux événements incompatibles de probabilité $PA)$, $P(B)$ non nulles, alors les événements A et B ne sont pas indépendants.

IV.1 - Indépendance mutuelle de plusieurs événements

La généralisation de la notion d'indépendance à trois (ou plus) événements révèle une difficulté. Deux notions paraissent naturelle lorsqu'on réfléchit à l'indépendance d'une famille de trois événements :
Tout d'abord, on pense à la notion d'indépendance « deux à deux » :

$$P(A\cap B) = P(A)\times P(B) \quad , \quad P(A\cap C) = P(A)\times P(C) \quad , \quad P(B\cap C) = P(B)\times P(C)$$

mais aussi au fait que la probabilité de l'intersection de trois ensembles devrait être égale au produit des probabilités de chacun des événements :

$$P(A\cap B\cap C) = P(A)\times P(B)\times P(C)$$

On pourrait s'attendre à ce que ces deux propriétés soient équivalentes mais il n'en est rien comme le montre l'exercice suivant :

Exercice 15

On lance deux fois un dé honnête. On considère les évènements A : « le premier numéro est pair », B : « le deuxieme numéro est impair »et C : « la somme des deux numéros est paire »

1. Calculer la probabilité de ces évènements.
2. Ces évènements sont-ils indépendants 2 à 2 ? Mutuellement indépendants ?

Définition 9

Soient $\Omega, P(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et $A_1, \ldots, A_n$, n événements.
On dit que $A_1, \ldots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** pour la probabilté P si pour tout ensemble d'indice $I \subset [\![1, n]\!]$,

$$P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} P(A_i)$$

Remarque 8

La définition d'événements mutuellement indépendants est donc plus « forte »que celle d'indépendance deux à deux.
En effet, des événements mutuellement indépendants sont indépendants deux à deux mais la réciproque est fausse !

Proposition 8

Soient $\Omega, P(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et $A_1, \dots, A_n$, n événements **mutuellement indépendants**.
Soient $B_1, \dots, B_n$, n événements tels que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$.
Alors les événements $B_1, \dots, B_n$ sont mutuellement indépendants.

Exercice 16

Une personne s'amuse à « Pile »ou « Face ». Elle lance à 10 reprises une pièce parfaitement équilibrée.
Déterminer la probabilité. qu'elle obtienne au total 3 « Pile ».