Chapitre 14

Probabilités sur des ensembles infinis

Ce chapitre présente les outils permettant de modéliser (et de calculer des probabilités) des évènements générés par des expériences aléatoires pouvant avoir une infinité d'issues.

I - Rappels : Evènements $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}$

On a déjà pu, lors d'un premier chapitre consacré aux probabilités, constater l'importance de savoir décrire un évènement de manière ensembliste, notamment à l'aide d'intersections ou de réunions. Jusqu'ici ces intersections et réunions étaient finies, mais nous aurons besoin d'utiliser les définitions, déjà données au chapitre 8, d'une union ou d'une intersection indexée par un ensemble infini.

Définition 1

Soit E un ensemble et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensemble de E. On peut alors construire la réunion et l'intersection de tous les A_n :

$$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \iff \exists n \in \mathbb{N}, x \in A_n$$

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \iff \forall n \in \mathbb{N}, x \in A_n$$

- l'évènements $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ correspond à la réalisation de l'un au moins des évènements A_n
- l'évènements $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ correspond à la réalisation de tous les évènements A_n

Ces opérations sur des suites d'évènements sont très utiles pour analyser des évènements complexes à l'aide d'évènements plus simples et, comme nous le verrons plus loin, calculer des probabilités.

Exercice 1

On lance une pièce une infinité de fois successivement. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'évènement "obtenir Pile au k-ième lancer".

1. Décrire par une phrase chacun des évènements suivants :

$$E_1 = \bigcap_{k=5}^{+\infty} A_k, \quad E_2 = \left(\bigcap_{k=1}^{4} A_k\right) \cap \left(\bigcap_{k=5}^{+\infty} \overline{A_k}\right), \quad E_3 = \bigcup_{k=5}^{+\infty} A_{2k-1}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer à l'aide des évènements A_k les évènements :
   - E_n : "on obtient au moins une fois Pile à partir du n-ième lancer".
   - F_n : "n'obtenir que des Pile à partir du n-ième lancer".
   - F : "n'obtenir que des Face à partir d'un certain lancer".

Exercice 2

Alice et Bruno lancent le même dé à tour de rôle *(Alice commence)*.
Le gagnant est le premier à obtenir 6. On s'intéresse alors aux trois évènements :

$$\begin{aligned} A &= \{\text{victoire d'Alice}\} \\ B &= \{\text{victoire de Bruno}\} \\ C &= \{\text{il n'y a pas de vainqueur}\} \end{aligned}$$

La simplicité de leur définition est trompeuse. Leur structure compliquée peut être analysée à l'aide des évènements plus simples suivants :

$$\begin{aligned} F_n &= \{\text{fin de la partie au n}^{\text{e}}\text{lancer}\} \\ S_n &= \{\text{le n}^{\text{e}} \text{ lancer donne un 6}\} \end{aligned}$$

Traduire les évènements A, B et C avec les évènements F_n et S_n.
Traduire l'évènement F_n en fonction des évènements S_n.

II - Espace probabilisable infini

Dans le cas où l'univers Ω est fini, l'ensemble des évènements est l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties de Ω. Mais dans le cas où Ω est infini (et non dénombrable), il n'est pas possible de considérer toutes les parties de Ω comme des évènements, car cela ne permet pas de définir correctement une probabilité.
Pour construire un espace dans lequel nous pouvons munir une probabilité dans le cas général, on impose que l'ensemble des événements associés à une expérience aléatoire forme une partie de $\mathscr{P}(\Omega)$, appelée tribu, qui vérifie certaines propriétés de stabilité indispensables. Plus précisément :

Définition 2 : *Tribu, espace probabilisable, évènements*

Soit Ω un ensemble. On appelle **tribu** ou σ-**algèbre** de parties de Ω, tout sous-ensemble $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ tel que :

- $\Omega \in \mathscr{A}$
- Si $A \in \mathscr{A}$ alors $\overline{A} \in \mathscr{A}$
- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{A}$ alors :

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$$

Munir Ω d'une tribu amène à considérer l'**espace probabilisable** $(\Omega, \mathscr{A})$.
Les éléments de $\mathscr{A}$ sont alors appelés les **évènements** de l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.

Exemples 1

1. $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu. Ainsi la définition ci-dessus généralise celle vue sur les ensembles Ω finis.
2. Si $A \subset \Omega$ alors, $\mathscr{A} = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ est la plus petite tribu contenant A.

Proposition 1 : *Conséquences*

Soit $\mathscr{A}$ une tribu de parties de Ω

1. $\emptyset \in \mathscr{A}$
2. si $A, B \in \mathscr{A}$ alors :

$$A \cup B \in \mathscr{A} \qquad A \cap B \in \mathscr{A} \qquad A \backslash B \in \mathscr{A}$$

3. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'élèments de $\mathscr{A}$ alors :

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$$

III - Probabilité sur un espace probabilisable infini

III.1 - Définitions

Définition 3 : *Définition d'une probabilité sur un ensemble probabilisable infini*

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. On appelle probabilité sur $\Omega, \mathscr{A})$ toute application

$$P \quad : \quad \mathscr{A} \quad \longrightarrow \quad [0,1]$$

vérifiant les deux propriétés suivantes :

(i) $P(\Omega) = 1$

(ii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{A}$ 2 à 2 incompatibles (disjoints) :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$$

Une fois muni d'une probabilité P l'espace $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est **un espace probabilisé**

Proposition 2 : *Propriétés similaires au cas où Ω est fini*

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un espace probabilisé et soient A et B deux éléments disjoins de $\mathscr{A}$.

1. $P(\emptyset) = 0$
2. Si A et B sont incompatibles alors : $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$
   Si $A_1, \dots, A_N$ sont n évènements deux à deux incompatibles alors :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) = \sum_{k=1}^{N} P(A_k)$$

3. On a

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \qquad P(A\backslash B) = P(A) - P(A\cap B)$$

4. Si $A \cap B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$.
5. Les **formules du cribles restent valides** :

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C)$$

Ainsi, les propriétés d'une probabilité vues dans le cas Ω fini restent valables.

Remarque 1

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ existe car

- c'est une série à termes positifs $(0 < P(A_n))$
- la suite des sommes partielles est majorée : $\sum_{n=0}^{N} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) \leqslant 1$

III.2 - Indépendance d'évènements et conditionnement

Toute la partie vue dans le chapitre "Probabilité sur un espace fini" sur les probabilités conditionnelles et l'indépendance de deux (voire plusieurs) évènements reste vraie : définition et propriétés de la probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, totales, formule de Bayes et définition de l'indépendance de deux évènements

Concernant la notion d'évènements mutuellement indépendants, au cas d'un nombre infini d'évènements on peut la généraliser :.

Définition 4 : *Famille infinie d'évènements mutuellement indépendants*

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements.
On dit que les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **mutuellements indépendants** si pour tout sous-ensemble fini d'entiers $I \subset \mathbb{N}$,

$$P(\bigcap_{n\in I} A_n) = \prod_{n\in I} P(A_n)$$

Exercice 3

On lance une infinité de fois un dé équilibré. On note A l'évènement : « On obtient au moins une fois un 1 »
En décomposant A à l'aide des évènements A_n, « le premier 1 est obtenu lors du n-ième lancer », déterminer $P(A)$.

Exercice 4

Revenons sur l'exemple d'Alice et Bruno. On admet que l'on a construit un espace $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ modélisant cette expérience.
Calculer $P(F_n)$ (pour $n \geqslant 1$) puis $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.

Les résultats obtenus dans les deux exercices précédents nous incitent à introduire la définition suivant :

Définition 5

- Un évènement $A \in \mathscr{A}$ est dit *négligeable* (pour P) si $P(A) = 0$.

- Un évènement $A \in \mathscr{A}$ est dit *presque sûr* (pour P) si $P(A) = 1$.

III.3 - Théorème de la limite monotone

Le cas Ω infini amène des propriétés de P spécifiques aux suites monotones d'évènements :

- On dit que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite croissante d'évènements** de $\mathscr{A}$ lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$A_n \subset A_{n+1}$$

- On dit que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite décroissante d'évènements** de $\mathscr{A}$ lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$A_{n+1} \subset A_n$$

Proposition 3 : *THEOREME DE LA LIMITE MONOTONE*

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. On a :

(i) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'évènements de $\mathscr{A}$ alors la suite $P(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

(ii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'évènements de $\mathscr{A}$ alors la suite $P(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

Exercice 5

On lance une infinité de fois un dé équilibré. A l'aide des évènements A_n, "on obtient au moins un 1 lors des n premiers lancers", montrer que presque sûrement, on obtiendra au moins un 1.

On peut déduire quasiment de manière immédiate le résultat suivant à partir du théorème de la limite monotone, en constatant, que si (A_n) est une suite d'évènements quelconques, la suite $\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'évènements.

Corollaire 1 : *COROLLAIRE DE LA LIMITE MONOTONE*

Pour tout suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$$

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$$

Exercice 6

On considère une infinité de lancers de dés et on veut déterminer d'une autre façon de ne jamais obtenir 1. Utiliser pour cela la famille d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par A_n ="le n-ième lancer amène un 1".

IV - Système complet infini-Formule des probabilités totales généralisée

Définition 6 : *Systèmes complets infinis d'évènements*

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille infini d'évènements (ie d'éléments de la tribu $\mathscr{A}$).
On dit que cette famille est un système complet d'événements si et seulement si :

$$(i) \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{si} \quad i \neq j \qquad\qquad (ii) \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$$

Il suit de la définition que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements alors la série $\sum_{n\geqslant 0} P(A_n)$ est une série convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$$

Proposition 4 : *Formule des probabilités totales généralisée*

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements et si B est un évènement, alors on a :

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) P_{A_n}(B)$$

Exercice 7

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 :

1. U_1 est composée de 3 boules blanches et 1 boule noire
2. U_2 est composée de 3 boules noires et 1 boule blanche.

On dispose également d'une pièce de monnaie truquée dont la probabilité d'obtenir Face est $\frac{2}{3}$.
On lance la pièce jusqu'à obtenir pour la première fois Face.

- si le nombre de lancers nécessaires à l'obtention de Face est impair alors on tire une boule dans l'urne U_1.
- si le nombre de lancers nécessaires à l'obtention de Face est pair alors on tire une boule dans l'urne U_2.

On souhaite déterminer la probabilité de tirer une boule blanche : $P(B)$.

Exercice 8 (*Un aperçu de la loi exponentielle*)

Dans une population, la probabilité qu'une famille ait n enfants est estimée par la valeur :

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}_+^*$$

1. Vérifier que $P : n \mapsto p_n$ est bien une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$
2. On suppose que les sexes sont équiprobables et qu'il y a indépendance des sexes des enfants à l'intérieur d'une même famille.
   (a) Sachant qu'une famille a n enfants, quelle est la probabilité que ce soit tous des garçons?
   (b) Calculer la probabilité qu'une famille ait au moins une fille.