Chapitre 4

Matrices

I - Notion de matrice et vocabulaire

Dans tout le chapitre n, p, q sont des entiers naturels non nuls.

Définition 1

Une matrice A à n lignes et p colonnes est un tableau défini par $n \times p$ éléments de $\mathbb{R}$ notés a_{ij} pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$ avec $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!],\ a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Le nombre a_{ij} est le *coefficient* d'indice (i,j) de la matrice A.

La matrice A est parfois dite de *taille* ou de *format* (n,p) ou tout simplement *matrice* $n \times p$.

L'ensemble des matrices de taille (n,p) à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On présente généralement les matrices de cette manière :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & & & j\text{-ème colonne} & & \\ & & & \downarrow & & \end{array} \\ i\text{-ème ligne} \rightarrow & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \end{array}$$

Exercice 1

1. À quels ensembles appartiennent les matrices suivantes ?

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ **2)** $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \mathrm{e} \\ \pi & \sqrt{2} & 0{,}2 \end{pmatrix}$ **3)** $\mathrm{Id}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **4)** $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

5) $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ **6)** $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **7)** $0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **8)** $F = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$

2. Écrire sous forme de tableau la matrice $M = (i-j)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant j \leqslant 4}}$.

Définition 2

On adopte le vocabulaire suivant :

- $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{M}_{nn}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des *matrices carrées* de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$.
- $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des *matrices lignes* de taille p à coefficients dans $\mathbb{R}$.
- $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des *matrices colonnes* de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$.
- $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une *matrice triangulaire supérieure* si $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i > j \implies a_{ij} = 0$.
- $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une *matrice triangulaire inférieure* si $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i < j \implies a_{ij} = 0$.
- $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une *matrice diagonale* si $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i \neq j \implies a_{ij} = 0$.
  On note parfois $(a_{ij}) = \mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$.
- $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une *matrice symétrique* si $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{ji} = a_{ij}$.
- $0_{np} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ est la *matrice nulle*, dont tous les coefficients valent 0. On la note aussi 0.
- $\mathrm{Id}_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est la *matrice identité* : diagonale, de taille n, dont les coefficients diagonaux valent 1.

Exercice 2

Pour $n = 3$, donner des exemples de matrices triangulaire supérieure (resp. inférieure), diagonale et symétrique.

II - Opérations de base sur les matrices

II.1 - Addition de matrices et multiplication d'un réel par une matrice

Définition 3

On définit les opérations suivantes sur l'ensemble $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$:

Addition : $\forall A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R}),\ \forall B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R}),\ A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$.

Multiplication par un réel : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R}),\ \lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$.

Exercice 3

À partir des matrices de l'exerice 1, calculer $E + D$, $3B$ et $A - 3\mathrm{Id}_3$.

Remarque 1

⚠ Il est possible d'additionner deux matrices uniquement lorsqu'elles ont les mêmes dimensions.

II.2 - Multiplication matricielle

Définition 4

On définit le produit d'une matrice A de n lignes et p colonnes avec une matrice B de p lignes et q colonnes comme la matrice de n lignes et q colonnes suivante :

$$\forall A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R}),\ \forall B = (b_{kj})_{\substack{1\leqslant k\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{R}),\ AB = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathscr{M}_{nq}(\mathbb{R}).$$

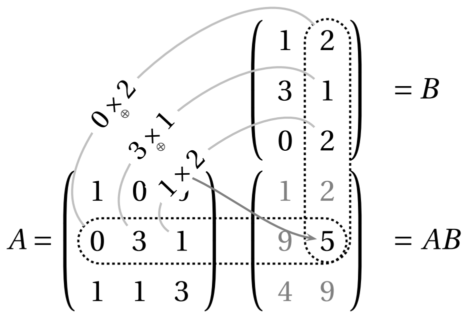
⚠ On ne peut calculer le produit AB que si le nombre de lignes de A égale le nombre de colonnes de B.

Remarque 2

En particulier le produit d'une matrice ligne $\ell = (\ell_j)_{1\leqslant j\leqslant n} \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})$ et d'une matrice colonne $c = (c_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ est un nombre, égal à $\ell_1 c_1 + \cdots + \ell_n c_n$.

Le coefficient (i, j) du produit AB est le produit de la i-ème ligne de A avec la j-ème colonne de B.

On peut disposer les calculs ainsi :



Exercice 4

À partir des matrices de l'exemple 1, calculer les produits :

1. ED 2. DE 3. $A\mathrm{Id}_3$ 4. AC 5. $0_{2,3}A$ 6. EB 7. Que dire de BE ?

Proposition 1 : *Propriétés du produit*

Le produit matriciel …

1. est associatif : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \forall C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}),\ (AB)C = A(BC)$.
2. est distributif à gauche par rapport à $-$: $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B, C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ A(B+C) = AB + AC$.
3. est distributif à droite par rapport à $+$: $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ (A+B)C = AC + BC$.
4. commute avec le produit externe : $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ (\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$.
5. vérifie $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ A\mathrm{Id}_p = A$ et $\mathrm{Id}_n A = A$.
6. n'est pas commutatif.
7. ne vérifie pas la propriété du produit nul.

Exercice 5

Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Vérifier que $M^2 - 3M + 2\mathrm{Id}_2 = 0_{2,2}$ puis factoriser l'expression de gauche dans l'égalité précédente.

III - Puissances de matrice

Définition 5

Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit A une matrice **carrée** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On appelle puissance k-ième de A, et on note A^k, la matrice $A \times \cdots \times A$ (k fois).
Par convention $A^0 = I_n$.

Comme le produit matriciel ne commute pas en général, la puissance de matrice garde seulement certaines propriétés des réels :

Proposition 2

Soient $(k,l,n) \in \mathbb{N}^2$ et $(A,B) \in \left(\mathcal{M}_p(R)^2\right)$.

1. $A^k A^l = A^{k+l}$.
2. $(A^k)^l = A^{kl}$
3. ⚠Lorsque A et B commutent, on a :
   (a) $(AB)^k = A^k B^k$ (b) $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$
   (c) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ (d) $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ (e) $(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i B^{n-i}$

Remarques 3

Deux exemples fondamentaux de matrices qui commutent.

- Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: A et λI_n commutent.
- Pour toute matrice carrée A : toutes les puissances de A commutent entre elles.

Exercice 6

Calculer, si possible :

1. A^2 **pour** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. A^2, A^3 , B^2, AB, BA, $A+B$, $(A+B)^2$, $A^2+2AB+B^2$ **pour** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **et** $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
3. M^0, M^1, M^2, M^3, M^4, M^{100} **pour** $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque 4

Une application importante du calcul de puissances de matrices est l'étude des suites récurrentes (notamment les suites récurrentes couplées qui interviennent en probabilités).

IV - Inverse d'une matrice

Définition 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On appelle *matrice inverse* de A et on note $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice qui vérifie

$$AA^{-1} = \mathrm{Id}_n = A^{-1}A$$

L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$ qui admettent une inverse est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 3

Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. A^{-1} est unique : si $BA = \mathrm{Id}_n$ ou $AB = \mathrm{Id}_n$ alors $B = A^{-1}$.
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. ⚠$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Exercice 7

1. Vérifier que $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $A^2 - A = I_n$ alors A est inversible, et préciser son inverse.
3. Soit $n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}^*$. Vérifier que λI_n est inversible, d'inverse $\frac{1}{\lambda} I_n$ et que 0_n n'est pas inversible.

Remarque 5

Pour des matrices inversibles, les propriétés de calcul des puissances sont valables pour des puissances négatives.

Remarque 6

⚠ La somme de deux matrices inversibles n'est pas inversible en général. Par exemple I_n et $-I_n$ sont inversibles mais $I_n - I_n = 0_n$ ne l'est pas.

Exercice 8

1. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p est inversible et préciser son inverse.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$. Simplifier $(P^{-1}AP)^2$, $(P^{-1}AP)^3$.
   Conjecturer une formule pour $(P^{-1}AP)^n$ valable pour $n \in \mathbb{N}^*$ et la prouver par récurrence. Est-elle encore valable pour $n = 0$?
   Si de plus A est inversible, vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, (P^{-1}AP)^n$ est inversible et préciser son inverse.
   Déduire que la formule démontrée est encore vraie pour les entiers négatifs.

En calcul matriciel, lorsqu'une matrice est inversible cela permet d'obtenir de nouvelles règles de calcul. On peut "simplifier" par cette matrice dans les égalités, comme on le fait dans $\mathbb{R}$ à l'aide de la divisions. Cependant il ne faut pas oublier de tenir compte de la non commutativité des matrices.

Pour ne pas faire d'erreur, il faut multiplier, à gauche ou à droite, par l'inverse de la matrice. En conséquence :

Proposition 4

Soit $C \in Gl_n(\mathbb{R})$, et A et B des matrices telles que les produits suivants aient un sens.

Simplification à gauche :
$$CA = B \Longleftrightarrow A = C^{-1}B$$
$$CA = CB \Longleftrightarrow A = B$$

Simplification à droite :
$$AC = B \Longleftrightarrow A = BC^{-1}$$
$$AC = BC \Longleftrightarrow A = B$$

Exercice 9

1. Soient A, B telles que $AB = 0$. Montrer que si $A \neq 0$ et $B \neq 0$ alors ni A ni B ne sont inversibles.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Calculer $B^2 + B$ et déduire que B n'est pas inversible.

Proposition 5

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où a, b, c, d sont quatre nombres réels. Alors,

1. Si $ad - bc = 0$, A n'est pas inversible.
2. Si $ad - bc \neq 0$, A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Remarque 7

Le calcul explicite de l'inverse d'une matrice carrée de petite dimension (3×3, voire plus rarement 4×4), qui repose essentiellement sur une séries de manipulations techniques, sera vu dans le chapitre consacré à la résolution de systèmes linéaires. Ceci signifie qu'une bonne partie des exercices sur les matrices n'est pas encore faisable.

V - Transposition et matrices symétriques

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$. La *transposée* de A est la matrice ${}^tA = (a'_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R})$ où :

$$\forall (i,j) \in [\![1;p]\!] \times [\![1;n]\!],\ a'_{ij} = a_{ji}$$

La transposition est une opération qui échange les lignes et les colonnes d'une matrice.

Exercice 10

Calculer la transposée de chacune des matrices de l'exemple 1.

Proposition 6 : *Propriétés de la transposition*

On a :

1. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad {}^t\,{}^tA = A.$
2. ⚠ $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \quad {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA.$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad {}^t(\lambda A + B) = \lambda\,{}^tA + {}^tB.$
4. $\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad {}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}.$
5. L'ensemble $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ :\ A = {}^tA\}$ est l'ensemble des *matrices symétriques* d'ordre n (parfois noté $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$).

Exercice 11

Vérifier la deuxième formule sur les matrices B et E de l'exemple 1.