Chapitre 7

Comportement asymptotique des suites

Ce chapitre donne tout d'abord les définitions rigoureuses de ce que sont des suites convergente, divergente vers $\pm\infty$ et divergente sans limite. L'intérêt de cette première partie, en dehors de fixer un cadre précis, est qu'elle permet de démontrer tous les résultats qui suivent dans les deux parties suivantes (nous n'en démontreront qu'un ou deux), ainsi que de nombreux théorèmes de la suite du cours.

Dans une seconde partie sont données les limites des suites dites de références, que vous pouvez voir comme le parallèle des formules de dérivation des fonctions usuelles. Il est donc primordial de savoir restituer tous ces résultats.

Sont abordées ensuite les principales opérations sur les limites (somme, différence, produit, inverse, quotient et composition). Certains cas donnent lieu à ce qu'on appelle des **formes indéterminées**, ce qui veut dire que le résultat de cette opération n'est pas connu *a priori* et dépend de l'exemple traité.

Enfin, nous verrons des résultats de **croissances comparées**, qui sont des cas particuliers de formes indéterminées qui reviennet souvent dans les exercices et sont à connaître.

Donner la **nature** d'une suite, c'est dire si elle est convergente ou divergente.

I - Suites convergentes et divergentes

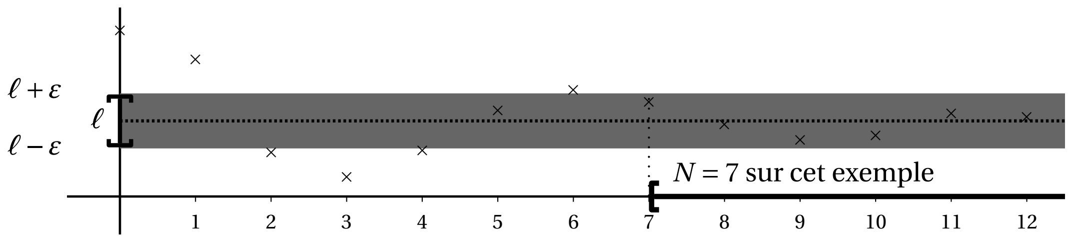
Suite convergente

Définition 1 : *Suite convergente*

On dit qu'une suite converge (ou admet une limite finie) lorsqu'il existe un réel l tel que tout intervalle ouvert I contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Ceci revient à dire que, **pour tout réel** $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que
$n \geqslant N \Rightarrow u_n \in \,]\,l-\varepsilon; l+\varepsilon\,[$.
On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et l est appelée la limite de la suite.

Remarque 1

La limite d'une suite, lorsqu'elle existe, est unique



Il y a deux cas pour qu'une suite soit divergente : soit elle n'a pas de limite (par exemple $(-1)^n$), soit sa limite est infinie.

Suite divergente vers $+\infty$

Définition 2 : *limite infinie*

On dit qu'une suite diverge vers $+\infty$ lorsque : tout intervalle ouvert du type $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Cela revient à dire que pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un rang N tel que : $n \geqslant N \Rightarrow u_n > A$

Exercice 1

Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et donner la limite d'une suite constante.

II - Limites des suites de références

Proposition 1 : *Limite des suites puissances*

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$.

Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$.

Proposition 2 : *Limites des suites géométriques*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = q^n$. Alors :

1. si $q \leqslant -1$ la suite n'a pas de limite.
2. si $-1 < q < 1$ la suite converge vers 0.
3. si $q = 1$ la suite converge vers 1 et est constante.
4. si $q > 1$ la suite diverge et tend vers $+\infty$.

Proposition 3 : *Limites du logarithme*

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty.$$

Exercice 2

A partir de ces propriétés, donner les limites éventuelles des suites suivantes :

1. $n^3, \sqrt{n}, \quad n^{-0.0001}, \quad \dfrac{1}{n}, \quad \dfrac{1}{\sqrt{n}}, \quad \dfrac{1}{n^{-0.0001}}, \quad \dfrac{n^2}{\sqrt{n}}, \quad n^{-0.4}\sqrt{n}.$
2. $u_n = -3\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^n, \quad v_n = -3\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^n, \quad w_n = 3\left(-\dfrac{3}{\pi}\right)^n, \quad x_n = 3\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)^n$

III - Opérations sur les limites

Voici une série de tableaux qui donnent les résultats des opérations sur les limites. On notera FI pour forme indéterminée.

Multiplication par un réel Soit u une suite ayant une limite et λ un réel non nul.

Le tableau suivant donne la limite éventuelle de λu selon la limites de u.

$\lim u$ \ λ	$\lambda > 0$	$\lambda < 0$
$l \in \mathbb{R}$	λl	λl
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Exemple 1

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-3}{n^2} = 0$$

Somme Soient u et v deux suites ayant des limites (finies ou infinies).

Le tableau suivant donne la limite éventuelle de $u + v$ selon les limites de u et v.

En combinant la multiplication par -1 et la somme on peut aisément déduire les limites obtenues par soustraction.

$\lim u$ \ $\lim v$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$l \in \mathbb{R}$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$		$+\infty$	FI
$-\infty$			$-\infty$

Exemple 2

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + n^2 = +\infty$$

Produit Soient u et v deux suites ayant des limites (finies ou infinies).

Le tableau suivant donne la limite éventuelle de uv selon les limites de u et v.

$\lim u$ \ $\lim v$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l > 0$				$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$		$l \cdot l'$		$-\infty$	$+\infty$
$l = 0$				FI	
$+\infty$				$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$					$+\infty$

Exemple 3

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right)\left(\left(\frac{-1}{3}\right)^n + 2\right) = -2$$

Inverse Soit u une suite ayant une limite.

$\lim u$	$l \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$
$\lim \frac{1}{u}$	$\frac{1}{l}$	0

⚠Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, il faut étudier **le signe de u**

Si $u_n > 0$: $\lim \frac{1}{u} = +\infty$

Si $u_n < 0$: $\lim \frac{1}{u} = -\infty$

Sinon : $\frac{1}{u}$ n'a pas de limite

Exemple 4

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(1-\frac{1}{n})} = -\infty$$

Quotient

Pour étudier la limite d'un quotient $\frac{u}{v}$, on remarque que $\frac{u}{v} = u \cdot \frac{1}{v}$ et il suffit alors de combiner les propriétés du produit et de l'inverse.

Dans les cases $\pm\infty$ le signe est facile à déterminer par la règle des signes.

Dans les cases $\pm\infty^*$ il faut se référer aux trois cas vus pour l'inverse d'une suite de limite nulle : selon le signe de v, soit il n'y a pas de limite soit la limite est infinie.

$\lim u$ \ $\lim v$	$l' \in \mathbb{R}^*$	0	$\pm\infty$
$l \in \mathbb{R}^*$	$\frac{l}{l'}$	$\pm\infty^*$	0
0	0	FI	0
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty^*$	FI

Exemple 5

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} = -\infty$$

Composition avec une fonction continue

Proposition 4

Soient l et a des réels pouvant aussi valoir $\pm\infty$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{x\to l} f(x) = a$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = a$

Exemple 6

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{n^3}+4} = 2$$

Puissances Il faut revenir à une notation exponentielle pour déterminer la limite de u^v.

Exemple 7

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}^n = 0$$

Exercice 3

Donner la limite éventuelle des suites de terme général :

1) $-3n^2$	2) e^{-n}	3) $-3n^2+e^{-n}$	4) $n^{0.0001}-1000000000$
5) $\left(n^2+\frac{1}{n}\right)(e^{-n}+2)$	6) $\frac{e^{-n}}{-3n^2}$	7) $\frac{-3n^2}{e^{-n}}$	8) $\left(\frac{1}{n^3}+0.5\right)^n$
9) $\ln((\frac{1}{2})^n)$	10) $\ln(1+\frac{1}{n})$	11) $e^{(2-(\frac{1}{3})^n)\cdot\frac{1}{2n-1}}$	12) $\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})}$
13) $\frac{1}{\ln(1-\frac{1}{n})}$	14) $\frac{1}{\ln(1+(-\frac{1}{4})^n)}$	15) $n^{\frac{1}{\ln(n)}}$	16) $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln(n)^2}}$

IV - Croissances comparées. Techniques sur les formes indéterminées

Voici les cas où l'indétermination d'une limite est levée directement d'après le cours.

Proposition 5 : *Croissances comparées*

Soient α et β deux nombres réels. Soit q un réel strictement positif.

1. La suite $(n!)$ l'emportent sur les suites $\left(q^n\right)$, $\left(n^\alpha\right)$ et $\left(\ln(n)^\beta\right)$.
2. Les suites $\left(q^n\right)$ l'emportent sur les suites $\left(n^\alpha\right)$ et $\left(\ln(n)^\beta\right)$.
3. Les suites $\left(n^\alpha\right)$ l'emportent sur les suites $\left(\ln(n)^\beta\right)$.

Cela signifie que si on effectue un **produit ou un quotient** de deux de ces suites, la limite est celle de la suite qui l'emporte.

Exemple 8

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^n}{n!}=0 \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n(-1)^n}{2^n}=0 \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{0,001}}{\ln(n)^{1000}}=+\infty$$

Exercice 4

Donner la limite des suites de terme général :

1. $\dfrac{\ln(n)}{n}$
2. $n\mathrm{e}^{-n}$
3. $\dfrac{n^{10000}}{(1,1)^n}$
4. $\ln(n)n^{-15}(1,1)^n$.

Méthode 1 : *Bases pour lever une forme indéterminée*

1. S'assurer qu'on a bien affaire à une forme indéterminée.
2. Si c'est une croissance comparée, conclure directement en rédigeant « par croissance comparée »sur la copie.
3. Sinon, se ramener à un des deux cas précédents par une des méthodes suivantes :
   (a) factorisation par le terme prépondérant (très générale)
   (b) méthode de la quantité conjuguée (plus marginale)

Remarque 2

A noter qu'il existe des calculs de limite qui nécessite des méthodes bien plus complexes, voire pour lesquels on ne connait pas encore de méthode !

Exercice 5

Dans chacun des cas, trouver la limite de la suite de terme général :

1) n^5-n^2+3 2) $e^n-n^{100}-\ln(n)^{10000}$ 3) $\dfrac{-2n^3+2n}{n^2}$ 4) $\dfrac{-2n^3+2n}{n^3}$

5) $\dfrac{-2n^3+2n}{n^4}$ 6) $\sqrt{4n^2+n}-n$ 7) $\sqrt{4n^2+n}-2n$ 8) $\left(\dfrac{1}{n}\right)^n$

9) $n^{\frac{1}{n}}$

V - Propriétés des limites et théorèmes de convergence pour les suites

Les notions de la partie précédente ne permettent pas d'étudier la nature de toutes les suites que vous rencontrerez. En effet, tous les résultats précédents portent sur les suites explicites et sur des combinaisons de suites qui possèdent toutes des limites.

Dans cette partie, nous donnons des résultats plus qualitatifs sur les suites et leurs limites qui permettent notamment de conclure lors de l'étude des suites récurrentes.

V.1 - Passage à la limite dans les égalités et les inégalités

Dans cette section, il est très important de remarquer qu'on considère des suites dont **on sait déjà qu'elles convergent**. Aucun des résultats qui suit ne peut donc servir à prouver l'existence d'une limite. En revanche, ces résultats peuvent donner la valeur potentielle d'une limite ou simplement un encadrement de cette valeur potentielle.

Proposition 6 : *Passage à la limite dans une inégalité*

(u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que $u_n \leqslant v_n$ ou bien $u_n < v_n$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. (⚠ *les inégalités strictes deviennent larges par passage à la limite*).

Proposition 7 : *Passage à la limite dans une égalité*

Si u a une limite l (finie ou infinie) alors toutes les sous-suites $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{n+2})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}, \dots$ ont aussi pour limite l.

Exemple 9

On sait (justifier) que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^n = 0$. Il suit par exemple que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2n}\right)^{2n} = 0$$

Exercice 6

Quelles sont les limites (finies ou infinies) possibles des suites vérifiant les relations de récurrence suivantes ?

1. $u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{n}$
2. $v_{n+1} = -2v_n - \frac{1}{n} + 1$
3. $2(w_{n+2})^2 = w_{n+1} + w_n$
4. $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$
5. $x_{n+1} = -\frac{1}{x_n}$

Exercice 7

La suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = -\frac{1}{v_n}$ peut-elle être convergente ? Divergente vers l'infini ?

Méthode 2 : *« du point fixe »*

Soit u une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ avec f une application **continue** sur un intervalle I (de la forme $[a;b]$, $[a,+\infty[$, $]-\infty;b]$ ou $]-\infty;+\infty[$ avec a et b réels), tel que I contient tous les termes de la suite.

Si u converge vers une limite ℓ, cette limite est une solution de l'équation $\ell = f(\ell)$ sur I (on dit que ℓ est un *point fixe* de f). En effet, $u_{n+1} \longrightarrow \ell$ et $f(u_n) \longrightarrow f(\ell)$ par continuité de f.

⚠ cette méthode permet de trouver des limites potentielles mais ne prouve en aucun cas la convergence de u.

V.2 - Théorèmes de comparaison

Proposition 8 : *Comparaison par rapport à une suite divergente*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leqslant v_n$. Alors :

1. si (u_n) diverge vers $+\infty$ alors (v_n) aussi.
2. si (v_n) diverge vers $-\infty$ alors (u_n) aussi.

Exercice 8

1. Étudier la limite des suites de terme général
   (a) $u_n = +3 \times (-1)^n - 3n$
   (b) $u_n = n^4(5 - 4(-1)^n)$
2. Soit (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + n$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant n$ et en déduire la limite de la suite.

Exercice 9

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$,
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$$
2. En déduire le comportement asymptotique de la suite (u_n) définie par :
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Proposition 9 : *Théorème d'encadrement ou des gendarmes*

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites telles que :

1. $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
2. (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite l .

Alors (v_n) converge aussi vers l .

Exercice 10

Étudier la limite de la suite (u_n) définie, pour tout entier par : $u_n = \dfrac{3n + 5 \times (-1)^n}{2n}$.

Exercice 11

Soient (v_n) une suite qui converge vers 0 et (u_n) une suite telle que $|u_n| \leqslant v_n$, à partir d'un certain rang. Montrer que (u_n) converge vers 0.

Application : Soit $\alpha > 0$. Montrer que $\left(\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ converge vers 0.

V.3 - Critère de convergence monotone

Théorème 1 : *Convergence monotone*

Toute suite croissante et majorée est convergente.
Toute suite décroissante et minorée est convergente.
Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Remarque 3

⚠**ce théorème ne donne pas la limite de la suite**.

Exercice 12

1. Donner un exemple de suite croissante qui diverge, et de suite majorée qui diverge.
2. $u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}$ avec $u_0=0$. Montrer que pout tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in[0;3]$. En étudier la convergence.
3. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$. Montrer que la suite est majorée par 2 et minorée par 1 (on montrera tout d'abord que pour $k\geqslant 2$, $\dfrac{1}{k^2}\leqslant\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$). En étudier la convergence.
4. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$.

V.4 - Suites adjacentes

Définition 3

Les suites u et v sont dites *adjacentes* si et seulement si :

1. la suite u est croissante.
2. la suite v est décroissante.
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n-u_n=0$.

Théorème 2 : *Des suites adjacentes*

Si u et v sont adjacentes, elles convergent vers la même limite ℓ. De plus $u_n\leqslant\ell\leqslant v_m$ pour tous $n,m\in\mathbb{N}$.

Exercice 13

Soient u et v définies par $u_0=1$, $v_0=12$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n+2v_n}{3}$ et $v_{n+1}=\dfrac{u_n+3v_n}{4}$.

1. Montrer que $(v_n-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. En considérant $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $t_n=3u_n+8v_n$, calculer la limite des suites u et v.

Exercice 14

A l'aide du théorème des suites adjacentes, proposer une démonstration alternative à l'exercice 11.3) pour montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\quad u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$, converge et encadrer sa limite.

Pour cela on fera intervenir une suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=u_n+\dfrac{1}{n}$.