Chapitre 10

Limites et continuité

I - Limites

Dans cette section, x_0 désigne un réel et f désigne une fonction définie sur un voisinage I de x_0.

I.1 - Limite finie en x_0

Définition 1 : *Limite finie en x_0*

Soit l un nombre réel. Dire que f possède l pour limite en x_0 signifie que $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de l dès que x est suffisamment proche de x_0.

TRADUCTION MATHÉMATIQUE :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } (\forall x \in I \text{ et } |x - x_0| < \alpha) \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Le nombre l s'appelle la limite de f en x_0.
On note alors $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ou $\lim\limits_{x_0} f = l$ voire $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$.

Exemples 1

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x - 1$ et $x_0 = 1$. Alors quand x se rapproche de 1, $f(x)$ se rapproche de $f(1) = 3$.
2. Par contre, il ne faut pas penser qu'en général $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Un exemple simple nous est fourni par la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } \quad x \neq 0 \\ -2 & \text{si } \quad x = 0 \end{cases}$$

On constate que $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1 \neq f(0)$.

I.2 - Limite infinie en x_0

Définition 2 : *Limite infinie en x_0*

1. Dire que f possède $+\infty$ pour limite en x_0 signifie que $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès que x est suffisamment proche de x_0.
   On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty$.
   TRADUCTION MATHÉMATIQUE :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } (\forall x \in I \text{ et } |x - x_0| < \alpha) \Rightarrow f(x) \geqslant A$$

2. Dire que f possède $-\infty$ pour limite en x_0 signifie que $f(x)$ est aussi petit que l'on veut dès que x est suffisamment proche de x_0.
   TRADUCTION MATHÉMATIQUE :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } (\forall x \in I \text{ et } |x - x_0| < \alpha) \Rightarrow f(x) \leqslant A$$

Exemple 2

1. $\lim\limits_{x \to 0} \ln(|x|) = -\infty$
2. Soit f la fonction définie sur $]2, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3}{2-x}$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$.

Exercice 1

On considère les trois fonctions :

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{array} \right. \qquad v : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right. \qquad w : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x^2} \end{array} \right.$$

Les fonctions u, v et w admettent-elles une limite en 0 ? Si oui quelle est la valeur de cette limite ?

I.3 - Limite à gauche et à droite en x_0

Définition 3 : *Limite à gauche en x_0*

Même définition mais en remplaçant « x est suffisamment proche de x_0 » par « x est suffisamment proche de x_0 et $x < x_0$ »

Définition 4 : *Limite à droite en x_0*

Même définition mais en remplaçant « x est suffisamment proche de x_0 » par « x est suffisamment proche de x_0 et $x > x_0$ »

Exemple 3

1. $\lim\limits_{x \to 1^-} \lfloor x \rfloor = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} \lfloor x \rfloor = 1$ et la fonction partie entière n'admet pas de limite en 1.
2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$
   On a alors $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty$

I.4 - Limite en $\pm\infty$

Définition 5 : *Limite en $+\infty$*

Même définition mais en remplaçant « x est suffisamment proche de x_0 » par « x est suffisamment grand. »

Définition 6 : *Limite en $-\infty$*

Même définition mais en remplaçant « x est suffisamment proche de x_0 » par « x est suffisamment petit. »

Exemple 4

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

I.5 - Théorèmes généraux sur les limites

Dans cette partie a désigne un réel, ou $-\infty$, ou $+\infty$.

I.5.a - Limites et opérations

Proposition 1 : *Limite d'une somme*

Le tableau suivant résume les différents cas possibles.

$\lim\limits_a f$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_a g$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_a (f+g)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	F.I	$+\infty$	$-\infty$

Proposition 2 : *Limite d'un produit*

Le tableau suivant résume les différents cas possibles.

$\lim\limits_a f$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}_+^*$	$l \in \mathbb{R}_+^*$	0	$l \in \mathbb{R}_-^*$	$l \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_a g$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_a f.g$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Proposition 3 : *Limite de l'inverse*

$\lim\limits_a f$	$l \in \mathbb{R}^*$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_a \frac{1}{f}$	$\frac{1}{l}$	$\begin{cases} +\infty \text{ si } f(x) > 0 \text{ au voisinage de } a \\ -\infty \text{ si } f(x) < 0 \text{ au voisinage de } a \\ \text{pas de limite sinon} \end{cases}$	0

Exercice 2

Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5x + 2$. Etudier la limite de f en $+\infty$.

Exercice 3

g est la fonction définie sur $]3, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$. Etudier la limite de g en $+\infty$ puis en 3.

Exercice 4

Etudier la limite en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $h(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{e^x - 1}$.

Exercice 5

Etudier les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $m(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
- $n(x) = \dfrac{3e^x - 1}{e^{2x} + 2}$

Exercice 6

f est la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{3x}$

Etudier la limite de f en 0.

Méthode 1 : *Comment calculer des limites indéterminées avec racines carrées*

Dans le cas où la quantité dont on veut calculer la limite fait apparaître une expression de la forme $\sqrt{u}+v$ ou $\sqrt{u}-v$, ou $\sqrt{u}+\sqrt{v}$, ou encore $\sqrt{u}-\sqrt{v}$, alors une idée est de multiplier par la **quantité conjuguée** de cette expression (c'est à dire la même expression en changeant le signe « + »en « - »et vice versa.
L'identité remarquable $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ fait ensuite disparaître les racines carrées et permet de conclure.

Exercice 7

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-3x+4}-x)$.

I.5.b - Limites et composition

Théorème 1

Soient a, b et c des nombres réels ou $-\infty$ ou $+\infty$.
f une fonction définie au voisinage de a et g une fonction définie au voisinage de b.

$$\text{Si } \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x)=b \\ \lim\limits_{x\to b} g(x)=c \end{cases} \qquad \text{alors} \qquad \lim\limits_{x\to a} g\circ f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=c$$

Exercice 8

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{2x+4}{x+5}}$.

I.5.c - Limites et inégalités

Proposition 4 : *Prolongement des inégalités*

Soit f et g deux fonctions telles que :

$$\text{au voisinage de } a, \quad f(x)\leqslant g(x)$$

On suppose de plus que f et g admettent une limite en x_0. Alors :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\leqslant \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Remarque 1

Si éventuellement, au voisinage de a, $f(x)<g(x)$, alors l'inégalité portant sur les limites reste large !

Exemple 5

$\forall x\in]0,+\infty[,\ 1-\dfrac{1}{x}<1$, mais $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{1}{x}=1$

Proposition 5 : *Théorème d'encadrement*

Soient f, g et h trois fonctions définies sur D telles que :

$$\forall x \in D \quad f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$$

On suppose de plus que f et g admettent une limite finie en a et que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = l$.
Alors la fonction h admet une limite finie en a et $\lim_{x \to a} h(x) = l$.

Proposition 6

Soient f et g deux fonctions telles que :

$$\text{au voisinage de } a \quad f(x) \leqslant g(x)$$

- Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors, $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$.
- Si $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ alors, $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Exercice 9

1. Etude au voisinage de 0 de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
   (a) Démontrer que pour tout réel x, $\quad \dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
   (b) Conclure
2. Etude au voisinage de 0 de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto e^x - 1$.
   (a) Démontrer que pour tout $x \in [-1;1]$, $\quad x \leqslant e^x - 1 \leqslant x + x^2$.
   (b) Conclure

Exercice 10

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x+1}$.

I.5.d - Limite et sens de variation

Théorème 2 : *Théorème de la limite monotone*

Si f ext une fonction monotone sur $]a, b[$, avec a et b réels ou infinis alors :

- f admet en tout point de l'intervalle $]a, b[$ une limite finie à droite et à gauche.
- f possède une limite finie ou infinie en a et b

Plus précisément :

	f croissante	**f décroissante**
f majorée	f admet une limite finie en b^-	f admet une limite finie en a^+
f non majorée	$\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$
f minorée	f admet une limite finie en a^+	f admet une limite finie en b^-
f non minorée	$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to b^-} f(x) = -\infty$

I.6 - Limites usuelles

I.6.a - Fonctions logarithme et exponentielles

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to a} e^x = e^a$$

$$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a} \ln(x) = \ln(a)$$

I.6.b - Fonction puissances

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ alors

$$\lim_{x\to+\infty} x^a = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a<0 \\ +\infty & \text{si} \quad a>0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to+0} x^a = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a<0 \\ 0 & \text{si} \quad a>0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ impair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

I.6.c - Fonctions polynomiales

Soit P une fonction polynomiale de degré p :

$$P:\ x \to a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$ et $a_p \neq 0$.

$$\lim_{x\to 0} P(x) = a_0 \qquad \lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_p x^p$$

I.6.d - Fonctions rationnelles

Exercice 11

Déterminer l'ensemble de définition ainsi que les limites en $-\infty$, 0 et $+\infty$ de la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{-x^2+1}{x^3+2x+1}$$

I.6.e - Croissances comparées

Proposition 7 : *au voisinage de* $+\infty$

$$\forall a>0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} x^a e^{-x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0$$

Remarque 2

Par passage à l'inverse,on obtient immédiatement :

$$\forall a>0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{\ln(x)} = +\infty$$

Cette proposition nous permet également d'en déduire deux autres :

Proposition 8 : *comparaison avec* ln *au voisinage de 0*

$$\forall a > 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} \ln(x) x^a = 0$$

Proposition 9 : *comparaison avec* exp *au voisinage de* $-\infty$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

Exercice 12

Déterminer les limites en $+\infty$ des fonction suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par :

•) $f(x) = e^x - x$

- $g(x) = x e^{4x}$

Exercice 13

Etudier la limite en 0 de la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^x \end{array}$$

I.6.f - Deux limites à connaître

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Exercice 14

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$. Etudier sa limite en $+\infty$.

Exercice 15

Déterminer les limites suivantes

1. $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x^2}$.
2. $\lim_{x \to +\infty} x \ln(1 + \frac{1}{x})$

II - Continuité

Définition 7

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $x_0 \in I$ et soit f définie sur I. Si f admet une limite finie en x_0, alors c'est nécessairement $f(x_0)$. On dit que f est **continue** en x_0 si et seulement si f admet une limite finie en x_0, égale à $f(x_0)$.

Autrement dit : f est continue en x_0 si et seulement si f est définie en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Vocabulaire :

Si f n'est pas continue en x_0, on dit que f est **discontinue** en x_0 ou que x_0 est un **point de discontinuité** de f.

Définition 8

Sous les même hypothèses que précédemment :

- On dit que f est **continue à gauche** en x_0 si et seulement si f est définie en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- On dit que f est **continue à droite** en x_0 si et seulement si f est définie en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Proposition 10

1. Si x_0 n'est pas une extrémité de I, alors on a l'équivalence :
   f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à gauche et à droite en x_0.
2. Si x_0 est l'extrémité gauche (resp droite) de I, alors on a l'équivalence :
   f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite (resp à gauche) en x_0.

Exercice 16

1. Etudier la continuité de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ en 3.
2. Etudier la contiuité de $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$ en 2.
3. Etudier la continuité de $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ en 0.

Exercice 17

Etudier la continuité en 3 de la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & \text{si } x \in [0,3[\cup]3,+\infty[\\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x = 3 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 18

Etudier la continuité en 0 de la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} x & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Définition 9

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $x_0 \in I$ et soit f définie sur $I \setminus \{x_0\}$.
On dit que f est **prolongeable par continuité** en x_0 lorsque f admet une limite finie en x_0.
L'application

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} I & & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left| \begin{array}{lll} f(x) & \text{si} & x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) & \text{si} & x = x_0 \end{array} \right. \end{array}$$

est appelée le **prolongement par continuité** de f en x_0.

Remarques 3

- La fonction $\tilde{f}$ est évidemment continue en x_0
- Par abus de notation, la fonction $\tilde{f}$ est parfois notee f.
- On définit de même la notion de prolongement à gauche et à droite.

Exercice 19

1. La fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - 1}{x} \end{array} \right.$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. La fonction $g : \left\{ \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \ln(x) \end{array} \right.$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
3. La fonction $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \end{array} \right.$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

III - Continuité sur un intervalle

Définition 10

On dit que f est **continue sur un intervalle** I si et seulement si f est continue en tout point de I.

Exemples 6

1. La fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ est continue sur $\mathbb{R}$
2. La fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$ est continue sur $\mathbb{R}_+$

IV - Opérations sur les fonctions continues

Proposition 11

- Soit λ un réel. Si f et f sont continues en x_0, alors $f+g$, $f\times g$ et λf sont continues en x_0.
- Si g est continue en x_0 avec $g(x_0)\neq 0$, alors $\dfrac{1}{g}$ est continue en x_0. Si de plus, f est continue en x_0, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0.
- Si f est continue en x_0 et si g est continue en $f(x_0)$ alors $g\circ f$ est continue en x_0.

Proposition 12 : *Fonctions de références*

- Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fractions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.
- La fonction racine $x\rightarrow\sqrt{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
- La fonction valeur absolue : $x\rightarrow|x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle exp : $x\rightarrow e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction logarithme népérien : ln : $x\rightarrow\ln x$ est continue sur $]0,+\infty[$

Proposition 13

Si f est continue sur un intervalle I et si g est continue sur un intervalle J tel que $f(I)\subset J$, alors $g\circ f$ est continue sur I.

Exercice 20

Montrer que la fonction $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \ln(1+x^2)\end{array}\right.$ est continue sur $\mathbb{R}$.

V - Limite de suites et continuité

Proposition 14

Si

$$\left\{\begin{array}{l}(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite convergente vers un réel } l\in\mathbb{R}\\ \\ f \text{ est une fonction continue en } l\end{array}\right.$$

alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(l)$

Exemple 7

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergeant vers 0 alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n=e^{-u_n}$ converge vers 1.

Méthode 2

Cette propriété est notamment utilisée pour l'étude des suites récurrentes de la forme $u_{n+1}=f(u_n)$.

VI - Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème 3 : *des valeurs intermédiaires*

Soient a et b des réels tels que $a < b$.
Si f est continue sur l'intervalle $[a,b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.
Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ d'inconnue x admet au moins une solution dans l'intervalle $[a,b]$.

Corollaire 1

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle :
si f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Remarque 4

Les intervalles I et $f(I)$ ne sont pas nécessairement de même nature.

Proposition 15

- Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.
  Si f est continue sur $[a,b]$ telle que $f(a) \times f(b) \leqslant 0$ alors f s'annule au moins une fois sur $[a,b]$.
- Toute fonction polynomiale de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21

Montrer que l'équation $xe^x = 1$ admet (au moins) une solution dans l'intervalle $[0,1]$.

VI.1 - Image d'un segment par une fonction continue

Un **segment** est un intervalle fermé borné, c'est à dire un intervalle de la forme $[a,b]$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Proposition 16

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment :
si f est continue sur un segment $[a,b]$, alors $f([a,b]) = [m,M]$ est un segment.

Théorème 4

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$, alors f est bornée sur $[a,b]$ et atteint ses bornes.

Terminons le paragraphe par deux cas particuliers :

Proposition 17

- Si f est une fonction continue et croissante sur un segment $[a,b]$, alors $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.
- SI f est une fonction continue et décroissante sur un segment $[a,b]$, alors $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$.

VI.2 - Théorème de la bijection

Proposition 18

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Si la fonction f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.
Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ d'inconnue x admet une unique solution dans l'intervalle $[a, b]$.

Exercice 22

Montrer que l'équation $x^3 + x = 3$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1, 2]$.

Théorème 5 : *de la bijection*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application **continue** et **strictement monotone** sur I. Alors :

$$\underline{f \text{ réalise une bijection de } I \text{ sur son image } f(I)}$$

Plus précisément,

- $f(I)$ est un intervalle, noté J
- $f : I \to J$ est une bijection de I sur J
- $f^{-1} : J \to I$ est strictement monotone, de même monotonie que f.
- $f^{-1} : J \to I$ est continue de J sur I.

Exercice 23

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f(x) = \frac{2x^2}{1+x}$$

1. Démontrez que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que vous expliciterez.
2. Soit $g : J \to [0, +\infty[$ l'application réciproque de f. Dressez le tableau de variation de g en précisant les limites de g aux bornes de J.
3. Etudiez la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x}$.

Exercice 24

Montrer que la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\ln(x) + e^x + 3x \end{array} \right.$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle à préciser.

VII - Application à l'étude des suites implicites

Le THÉORÈME DE LA BIJECTION sert souvent à étudier des suites définies implicitement, c'est à dire des suites dont le terme général est solution d'une équation :

$$f_n(x) = 0$$

Exercice 25

On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$$

1. (a) Etudiez les variations de f, ainsi que ses limites aux bornes de l'intervalle de définition. Présentez ces résultats sous la forme d'un tableau de variation.
   (b) Montrez que f induit une bijection, notée $\tilde{f}$ de $]0, \frac{1}{2}[$ sur $\left]0, \sqrt{\frac{2}{e}}\right]$. Dressez le tableau de variations de l'application réciproque g de $\tilde{f}$.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier supérieur ou égal à 2. Démontrez que l'équation

$$f(x) = \frac{1}{n}$$

   admet une unique solution dans $]0, \frac{1}{2}]$. On note a_n cette solution.
   (b) Montrez que la suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.
   (c) En déduire que (a_n) est convergente et déterminer sa limite