Chapitre 15

Intégration sur un segment

Les deux problèmes suivants :

- Calcul d'une primitive d'une fonction donnée ;
- Calcul de l'aire d'une région du plan délimitée par des courbe d'équations données.

semblent très différents. En réalité, ils sont tous les deux liés à la notion d'intégrale, comme nous allons le voir.

I - Primitives

Définition 1

On dit que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I si F est dérivable sur I et si pour tout $x \in I$:

$$F'(x) = f(x)$$

Exemples 1

1. La fonction $F : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + 2x$ est un primitive de la fonction $f : x \mapsto x^2 + 2$ sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction logarithme népérien $F : x \mapsto \ln x$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.
3. La fonction $F : x \mapsto e^x + 5x - 7$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto e^x + 5$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 1 : *Existence de primitives d'une fonction continue sur un intervalle*

Toute fonction f **continue** sur un intervalle I possède au moins une primitive F sur I.

☛ Ce théorème peut-être prolongé. En effet, il est également possible de montrer que toute fonction continue par morceaux sur un intervalle I, admet au moins une primitive.

Proposition 1 : *Primitives d'une fonction continue sur I*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I :

- Si F est une primitive de f sur I alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions de la forme :

$$x \mapsto F(x) + k \qquad \text{où} \qquad k \in \mathbb{R}$$

- Soient a et b deux nombres réels. Alors, il existe une unique primitive F de f telle que $F(a) = b$

Exercice 1

Déterminer une fonction G, définie sur $\mathbb{R}^*$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, telle que $G(1) = 3$, $G(-2) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $G'(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Proposition 2

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Soient $a, b \in I$.
Soit F_1 et F_2 deux primitives de f. Alors $F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a)$.

II - Définitions de l'intégrale

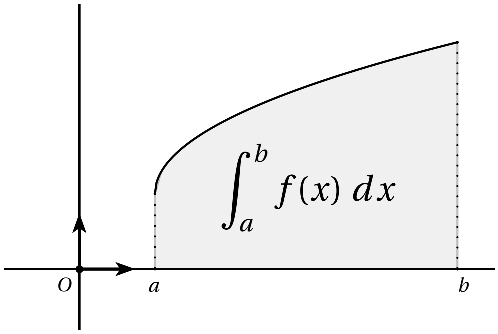
II.1 - Intégrale d'une fonction positive - Aire sous la courbe

Définition 2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive (i.e. $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$).
Soient $a, b \in I$ avec $a \leqslant b$. On définit l'(intégrale de f entre a et b, que l'on note

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

comme l'aire de la surface délimitée par les droites d'équation $x = a, x = b$, l'axe des abscisses et la courbe de f.



Remarque 1

Dans l'expression :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

x est une variable *muette*. Cela signifie qu'on peut la remplacer par une autre lettre. On peut écrire par exemple :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Cela doit vous rappeler la variable i dans un signe « somme » :

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Remarque 2

La définition de l'intégrale assure notamment que $\int_a^a f(t)dt = 0$

Remarque 3

Si $a > b$, on donne un sens à l'intégrale en posant :

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$$

☛ La définition de l'intégrale assure notamment que $\int_a^a f(t)dt = 0$

SI f est continue mais non nécessairement positive, on peut alors l'écrire comme différence de deux fonctions positives (correspondant aux parties :

$$f = f_+ + f_-$$

et l'intégrale de f est alors la différence des intégrales de f_+ et f. Il découle immédiatement et simplement de cette définition de l'intégrale, des propriétés cruciales :

Proposition 3 : *« relation de Chasles »*

Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue, et $(a, b, c) \in I^3$. Alors :

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Si la définition est simple à comprendre, le calcul explicite de l'intégrale paraît cependant compliqué. Néanmoins, on observe facilement le fait suivant dont la généralisation permet de calculer l'intégrale à partir d'une primitive.

Proposition 4

Soit $f : [a; b] \to R$ une fonction continue, monotone et positive. Alors, la fonction F définie sur $[a; b]$ par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est dérivable sur $]a, b[$ et, pour tout $x \in]a, b[, F(x) = f(x)$.

II.2 - Intégrale d'une fonction continue et primitives

Définition 3

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue.
Soient $a, b \in I$. On appelle *intégrale de f entre a et b*, et on note :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

le réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I.

Introduisons une notation : pour toute fonction $g : [a, b] \to \mathbf{R}$, on pose

$$[g]_a^b = g(b) - g(a)$$

On écrira aussi par exemple :

$$[x^2]_a^b = b^2 - a^2$$

Avec cette notation, on peut écrire la définition de l'intégrale de la façon suivante :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$$

Exemple 2

Calculons une intégrale simple :

$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

$$1)\int_0^1 x\,dx \qquad 2)\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t^2}\,dt \qquad 3)\int_{-1}^1 x^3\,dx$$

Exercice 3

Soit f une fonction continue sur un intervalle $\mathbb{R}_+$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose :

$$g(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démontrer que g est la primitive de f qui s'annule en 1.

III - Quelques propriétés de l'intégrale

III.1 - Linéarité de l'intégrale

Comme la dérivation, l'intégration se « comporte bien » avec l'addition et la multiplication par une constante :

Proposition 5 : *« linéarité de l'intégrale »*

Soient I un intervalle, $f, g : I \to \mathbf{R}$ deux fonctions continues, et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors :

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Avec cette proposition et le tableau des primitives usuelles, il est facile de calculer des intégrales de polynômes par exemple.

Exercice 4

Calculer :

$$\int_{-1}^1 P(x)\,\mathrm{d}x$$

où $P(x) = -x^6 + 2x^5 + 8x^3 - 2x^2 + \dfrac{1}{3}$.

III.2 - Positivité de l'intégrale

Proposition 6 : *« Positivité de l'intégrale »*

Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonctions continue et positive (i.e. pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant 0$). Alors, pour tous $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$$

On en déduit immédiatement les corollaires suivants :

Corollaire 1

Soient I un intervalle, $f, g : I \to \mathbf{R}$ deux fonctions continues telles que, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant g(x)$. Alors pour tout $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(t)dt \geqslant \int_a^b g(t)dt$$

Corollaire 2

Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbf{R}$ une fonctions continue. Alors, pour tous $a, b \in I$,

$$\int_a^b |f(t)|dt = 0 \iff \forall x \in [a, b], \quad f(x) = 0$$

Exercice 5 (*Une preuve d'une limite usuelle*)

1. Soit $x \geqslant 0$. Montrer que pour tout réel $t \in [0, x]$,
$$\frac{1}{1+x} \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant 1$$
2. En intégrant par rapport à t entre 0 et x l'inégalité précédente, montrer que
$$\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$
3. Retrouver alors un résultat bien connu.

Exercice 6 (*Séries de Riemann*)

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$ et tout $\alpha > 0$ différent de 1 :
$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}dx \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^n \frac{1}{x^\alpha}dx$$
2. Démontrer le critère de convergence des séries de Riemann.

Exercice 7

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale

$$J_n = \int_0^1 xe^{-x^2}(1-x)^n dx$$

1. Déterminer les variations de la fonction $x \mapsto xe^{-x^2}$ sur $[0, 1]$.
2. En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{2e}(n+1)}$$
3. En déduire la limite de la suite (J_n)

III.3 - Intégrale d'une fonction définie par morceaux

On définit l'intégrale d'une fonction continue par morceaux de façon évidente : on calcule l'intégrale sur chaque « morceaux »où la fonction est continue, puis on fait la somme

Exercice 8

On définit une fonction f sur $[0,2]$, en posant $f(x) = x$ si $x \in [0,1]$ et $f(x) = -x$ si $x \in [1,2]$. Déterminer $\int_0^2 f(t)dt$

IV - Comment calculer les intégrales

Par définition, si on sait calculer des primitives, alors on sait calculer les intégrales correspondantes. Or on sait calculer les primitives de certaines fonctions simples.

Exemple 3

Une primitive de $x \mapsto x^7$ est $x \mapsto \frac{x^8}{8}$.

Pour d'autres fonctions, par exemple $x \mapsto \ln x$, on est rapidement « bloqué ». Il existe même des fonctions pour lesquelles trouver une expression simple pour leurs primitives est sans espoir [1] (théorème de Liouville).

IV.1 - Le catalogue des primitives usuelles

Il suffit essentiellement de prendre le catalogue des dérivées et de le lire à l'envers. Dans le tableau suivant, c désigne une constante arbitraire (appelée « constante d'intégration »).

Fonction	Sur l'intervalle	Primitives
$x \mapsto 1$	$\mathbf{R}$	$x \mapsto x + c$
$x \mapsto x$	$\mathbf{R}$	$x \mapsto \frac{x^2}{2} + c$
$x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbf{N})$	$\mathbf{R}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x \mapsto x^a$ $(a \in \mathbf{R} \setminus \{-1\})$	$\mathbf{R}_+^*$	$\frac{1}{a+1} x^{a+1}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbf{R}_+^*$	$x \mapsto \ln(x) + c$
$x \mapsto e^x$	$\mathbf{R}$	$x \mapsto e^x + c$

Bien sûr, si on a besoin d'une seule primitive, on peut choisir arbitrairement la constante d'intégration c. En général on choisit $c = 0$, pour simplifier les calculs.

Exercice 9

Trouver une primitive de $x \mapsto x^3 \sqrt{x}$.

1. Par exemple, la fonction $x \mapsto \exp(x^2)$

IV.2 - Reconnaître une dérivée

On sait que si u est une fonction dérivable, la dérivée de $\ln(u)$ (sous réserve que $\ln(u)$ ait un sens) est $\dfrac{u'}{u}$. On sait aussi que la dérivée de e^u est $u'e^u$. Et on sait que la dérivée de u^a (ù a est une constante) est, sous réserve que u^a ait un sens, au^{a-1}. On peut présenter ces résultats « à l'envers » pour obtenir le tableau suivant :

Fonction	Primitives	Remarques
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(u)+c$	on suppose que u est à valeurs >0
$u'e^u$	e^u+c	
$u'u^a$	$\dfrac{1}{a+1}u^{a+1}+c$	on suppose que u est à valeurs >0 et que $a\neq -1$

Exercice 10

Calculer :

$$(i)\quad \int_0^1 2x(x^2+1)^4\mathrm{d}x,\qquad (ii)\quad \int_e^3 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)},\qquad (iii)\quad \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$(iv)\quad \int_0^1 (2x-1)e^{x^2-x+1}\mathrm{d}x,\qquad (v)\quad \int_0^2 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^3}\mathrm{d}t},\qquad (vi)\quad \int_2^3 \frac{2t}{1-t^2}\mathrm{d}t$$

IV.3 - Intégration par parties

Proposition 7 : *« formule d'intégration par parties »*

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I. Soient a et b deux éléments de I. Alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

Méthode 1

On pourra retenir la formule d'intégration par parties sous la forme abrégée :

$$\int uv' = [uv] - \int u'v$$

Ainsi, l'intégration par partie ramène l'intégration de uv' à celle de $u'v$.

Exemple 4

A priori, il n'est pas évident de calculer une primitive de la fonction $x\mapsto xe^x$. Une intégration par parties permet de le faire. Posons $u(x)=x$ et $v'(x)=e^x$. On a donc $u'(x)=1$ et on convient que $v(x)=e^x$. Par intégration par parties :

$$\int_0^t xe^x\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_0^t - \int_0^t u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [xe^x]_0^t - \int_0^t e^x\mathrm{d}x = te^t - [e^x]_0^t = te^t - e^t + 1$$

Ainsi, la primitive de $x\mapsto xe^x$ qui s'annule en 0 est $t\mapsto te^t-e^t+1$ (on peut d'ailleurs le vérifier facilement a posteriori).

Exercice 11

Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer :

$$I_n = \int_1^e t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t, \qquad J_n = \int_1^e t^n (\ln t)^2\,\mathrm{d}t, \qquad K_n = \int_0^1 (x^2 + x)e^x\,\mathrm{d}x$$

IV.4 - Changement de variable

Proposition 8 : *« formule de changement de variable »*

Soit u une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $u(I)$. Soient a et b deux éléments de I. Alors :

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Méthode 2

En pratique, quand on fait un changement de variable pour calculer une intégrale du type :

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x$$

on commence par dire : « posons $t = u(x)$ ». Ensuite, on utilise la formule mnémotechnique :

$$u'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

Enfin, on ajuste les bornes d'intégration en remarquant que si x parcourt l'intervalle $[a, b]$, alors $t = u(x)$ parcourt l'intervalle $[u(a), u(b)]$.

Exemple 5

Calculons :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1}$$

On pose $t = x + 1$. On a donc $\mathrm{d}t = 1 \cdot \mathrm{d}x = \mathrm{d}x$. Donc :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Puisque x parcourt l'intervalle $[0, 1]$, $t = x + 1$ parcourt $[1, 2]$. Finalement :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = [\ln t]_1^2 = \ln(2) - \ln(1)$$

Exercice 12

Calculer avec un changement de variable, les intégrales :

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2t+1}, \qquad J = \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t, \qquad K = \int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x, \qquad L = \int_1^x \frac{[\ln(t)]^n}{t}\mathrm{d}t$$

Exercice 13

Soit f une fonction continue sur un intervalle de la forme $[-a, a]$.

1. Démontrer que si f est impaire, son intégrale entre $-a$ et a est nulle;
2. Démontrer que si f est paire, son intégrale entre $-a$ et a vaut le double de son intégrale entre 0 et a.

V - Fonctions définies par une intégrale

On fait dans cette partie quelques remarques concernant l'étude de fonction telles que :

$$f : x \mapsto \int_x^{x^2} \exp(t^2)\,\mathrm{d}t$$

Le résultat fondamental à ce sujet est le suivant :

Proposition 9

Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue (I étant un intervalle). Soit $a \in I$. Alors la fonction :

$$x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est la primitive de f qui s'annule en a.

Cette proposition est une conséquence immédiate de la définition de l'intégrale.
Elle peut s'énoncer dans « l'autre sens » :

Corollaire 3

Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue (I étant un intervalle). Soit $a \in I$.
On pose, pour tout $x \in I$:

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Alors g est dérivable et, pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = f(x)$$

Exemple 6

Posons, pour tout $x > 0$:

$$g(x) = \int_1^x (\ln t)^2\,\mathrm{d}t$$

Alors la fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$:

$$g'(x) = (\ln x)^2$$

On en déduit par exemple que g est croissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

Revenons à l'exemple plus compliqué de la fonction :

$$f : x \mapsto \int_x^{x^2} \exp(t^2)\,\mathrm{d}t$$