Chapitre 17

Généralisation de la notion d'intégrale

Lorsqu'une fonction f est continue sur un segment $[a;b]$, on sait définir l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$.
Le but de ce chapitre est de définir, lorsque c'est possible, l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle du type $]-\infty,a]$, $[a,+\infty[$ ou $[-\infty,+\infty[$, a étant un réel.

I Extension de la notion d'intégrale

I.1 - Sur un intervalle du type $[a;+\infty[$ ou $]-\infty;a]$

Définition 1 : *Convergence d'une intégrale impropre*

Soit f une fonction continue sur l'intervalle **semi-ouvert** $[a\,;+\infty[$.

1. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est **convergente** lorsque la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, et dans ce cas, on pose :
$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. On définit de la même façon lorsque f est continue sur $]-\infty;a]$, $\int_{-\infty}^a f(t)\,dt = \lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)\,dt$.

Exercice 1

- Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt$?
- Quelle est la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$?
- Quelle est la nature de l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)}\,dt$?

I.2 - Sur un intervalle du type $]-\infty;+\infty[$

Définition 2

Soit f une fonction continue sur l'intervalle ouvert $\mathbb{R}$.
Alors, on dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ssi les intégrales $\int_{-\infty}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent pour tout réel $c\in\mathbb{R}$. Dans ce cas, on a :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Justifier la convergence et calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$$

I.3 - Techniques de calcul

Les propriétés sur les intégrales impropres (linéarité, positivité, croissance) découlent de celles sur les intégrales définies sur un segment par restriction de l'intervalle et passage à la limite.

Méthode 1

Intégration par parties ou un changement de variable sur des intégrales impropres Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;+\infty[$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Pour calculer cette intégrale impropre en intégrant par partie ou par changement de variable :

1. On restreint l'intervalle d'intégration à $[a;x]$ avec $x \in [a;+\infty[$.
2. On effectue une intégration par parties ou un changement de variable classique sur l'intégrale définie $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. On passe à la limite quand x vers $+\infty$.

Exercice 3

Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$.

Exercice 4

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien convergente.
2. Calculer I_0.
3. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $I_n = nI_{n-1}$. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.
4. A l'aide du changement de variable $s = \sqrt{t}$, justifier la convergence et calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}dt$$

II Critères de convergence

II.1 - Intégrales de Riemann

Les intégrales de Riemann sont des intégrales de référence que l'on peut utiliser comme du cours.

Théorème 1 : *Convergence des intégrales de Riemann*

Soient a et b deux réels **strictement positifs**, et α un réel.

1. Intégrale de Riemann impropre en $+\infty$:
$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1$$
2. Intégrale de Riemann impropre en 0 :
$$\int_0^{b} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1$$

Exercice 5

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ diverge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

II.2 - Fonctions positives

Dans cette partie, on considère f et g, deux fonctions continues et **positives** sur $[a;+\infty[$. Tous les résultats énoncés pourront être adaptés à des fonctions continues sur $]-\infty;a]$ avec $a \in \mathbb{R}$ et continues sur $\mathbb{R}$.

II.3 - Critère de comparaison par inégalité

Théorème 2

Soient f et g deux fonctions continues et **positives** sur $[a;+\infty[$ telles que : $\forall t \in [a;+\infty[,\ 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$.

1. Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^{=\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Exercice 6

Déterminer la nature des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+t+1}\,dt,\quad \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt,\quad \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln(t)}}\,dt.$

II.4 - Fonctions de signe quelconque

Définition 3 : *Convergence absolue*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a;\,+\infty[$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est **absolument convergente** si $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 3

Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, alors elle est convergente. *(La réciproque est fausse !)*

Remarque 1

Attention, si $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ est divergente alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ n'est pas nécessairement divergente.