Chapitre 2

Généralités sur les fonctions

I - Vocabulaire

Définition 1 : *Fonction*

On dit que f est une **fonction numérique d'une variable réelle** s'il existe un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ tel que chaque nombre x appartenant à I possède une unique image, notée $f(x)$ qui est un nombre réel.
Notation :

$$\begin{array}{rccc} f: & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

On peut dire aussi que f est une **application** de I dans $\mathbb{R}$.

☞ Le plus grand (au sens de l'inclusion) ensemble I, constitués des nombres réels qui possèdent une image par f, est appelé **ensemble de définition** de f. Il est noté traditionnellement D_f.

☞ $a \in I$ est un **antécédent** de b par f si b est l'image de de a par f, i.e $b = f(a)$. Les nombres réels qui possèdent au moins un antécédent par f constituent l'ensemble image de f, que l'on note $f(I)$.

☞ L'ensemble des points (du plan cartésien) de coordonnnées $(x, f(x))$, où x est un élément de I, est la **courbe représentative** de f.

Remarque 1

Il faut bien noter que $f(x)$ est un nombre (l'image du nombre x par la fonction f) et pas une fonction. Lorsque vous parlez de la fonction, notée là f !

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par

1. $f(x) = \sqrt{x-5} - \dfrac{1}{x-3}$
2. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-x-1}$

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{-3x^2+x+1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. (On le notera D_f)
2. Déterminer une majoration de f sur D_f.

II - Opérations sur les fonctions

Définition 2

Soient $f,\ g$ deux fonctions numériques définies sur le même ensemble I et λ (lambda) un nombre réel :

- La **somme** de f et de g est la fonction notée $f+g$ et définie sur I par :
$$\forall x \in I, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
- Le **produit** de f et de g est la fonction notée $f.g$ et définie sur I par :
$$\forall x \in I, \quad (f.g)(x) = f(x) \times g(x)$$
- Le **produit du réel** λ et de f est la fonction notée λf et définie sur I par :
$$\forall x \in I, \quad (\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$$
- Si de plus, pour tout réel x de I, $g(x) \neq 0$, alors le **quotient** de f par g est la ‘ fonction notée $\dfrac{f}{g}$ définie sur I par :
$$\forall x \in I, \quad \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
- Si $f(I) \subset D_g$, la **composée** de f par g est la fonction notée $g \circ f$ et définie sur I par :
$$\forall x \in I, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Exercice 3

Dans les cas suivants, exprimez $f \circ g$ et $g \circ f$ et préciser leur ensemble de définition.

1. $f(x) = 3x - 4$ et $g(x) = x^2 + 1$
2. $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = x^2 + 1$

III - Restriction et prolongement

Soient les fonctions :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$$

Ces deux fonctions ont la même action mais ne sont pas définies sur le même ensemble.
Comme $[0,1] \subset \mathbb{R}$, on dit que g est **la restriction** de la fonction f à l'intervalle $[0,1]$.
Si on définit maintenant la fonction h sur $[-1,1]$ par

$$h(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \in [-1,0] \\ x^3 & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$$

alors la fonction h est un **prolongement** de la fonction g à $[-1,1]$ mais pas une restriction de f à $[-1,1]$.

IV - Eléments remarquables d'une fonction

Définition 3 : *Majorant et minorant*

On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **majorée** (resp. **minorée**) sur I si il existe un réel M (resp un réel m) tel que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leqslant M \qquad (resp. \quad f(x) \geqslant m$$

On dit alors que M (resp m) majore (resp. minore) f sur I ou
est un majorant (resp. un minorant) de f sur I.

Une fonction à la fois majorée et minorée est dite **bornée** :

il existe un réel m et un réel M tel que, pour tout réel x de I, $m \leqslant f(x) \leqslant M$

ce qui revient à :

il existe un réel k tel que, pour tout réel x, $|f(x)| \leqslant k$

☞ Un majorant n'existe pas toujours ! ! De même, pour les minorant. Par exemple,...

☞ Un majorant quand il existe, n'est pas unique : en effet, Si M majore f, alors tout réel supérieur à M majore aussi f.

Exercice 4

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^4 - 3}{x^2 + 1}$$

Démontrer que f est bien définie, qu'elle est minorée, mais pas majorée.

Exercice 5

Encadrer les expressions suivantes par des constantes, sur les domaines indiqués :

$$\begin{array}{rcl} 2x+1 & \text{sur} & [0,1] \\ -x+5 & \text{sur} & [-2,1] \\ x^2 & \text{sur} & [-1,2] \\ \dfrac{-x}{3x+1} & \text{sur} & [2,4] \end{array}$$

Définition 4 : *Maximum et minimum*

On appelle, si il existe, maximum M_0 (resp minimum m_0) de la fonction f sur I l'unique majorant (resp. minorant) de f sur I, tel que :

il existe un nombre réel x de I tel que : $f(x) = M_0$

Exemple 1

La fonction $f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ est minorée sur $]0,+\infty[$ mais n'admet pas de minimum sur cet intervalle.

V - Propriétés remarquables d'une fonction

V.1 - Monotonie

Définition 5

Soit I un intervalle sur lequel f est définie. On dit que :

- f est **croissante sur** I lorsque :

  pour tout couple de nombres x_1 et x_2 appartenant à I, si $x_1 \leqslant x_2$ alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$

- f est **décroissante sur** I lorsque :

  pour tout couple de nombres x_1 et x_2 appartenant à I, si $x_1 \leqslant x_2$ alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$

Un fonction est **monotone** sur un intervalle I si elle est croissante ou décroissante sur cet intervalle.

☞ Une fonction constante est à la fois croissante et décroissante.

Exemple 2

La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$, strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ mais n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

Proposition 1 : *Opérations et monotonie*

1. La somme deux fonctions croissante sur I est croissante sur I.
2. La somme de deux fonctions décroissantes sur I est décroissante sur I.
3. La composée de deux fonctions croissantes (ou toutes deux décroissantes) sur I est croissante sur I.
4. La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante.

Remarque 2

Produit de fonctions Le produit de deux fonctions croissante n'est pas toujours une fonction croissante.

Exercice 6

Quelle hypothèse doit-on rajouter pour que le produit de deux fonctions croissantes soit une fonction croissante ?

Exercice 7

1. Montrer que pour tous réels a et b, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.
2. Ecrire a^2+ab+b^2 sous forme canonique.
3. En déduire (sans dériver !) que la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

V.2 - Parité

Définition 6

On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est paire lorsque :

$$\begin{cases} \text{Si } x \text{ est un réel appartenant à } I \text{ alors son opposé, } -x\text{, appartient aussi à } I \\ \forall x \in I, f(-x) = f(x) \end{cases}$$

On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est impaire lorsque :

$$\begin{cases} \text{Si } x \text{ est un réel appartenant à } I \text{ alors son opposé, } -x\text{, appartient aussi à } I \\ \forall x \in I, f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

Graphiquement :

- f est paire si et seulement si l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$.
- f est impaire si et seulement si l'origine est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

Exemple 3

Les fonction $x \to x^2$; $x \to \sqrt{2}$ définies sur $\mathbb{R}$ sont paires.
Les fonction $x \to x$; $x \to x^3$ et $x \to \dfrac{1}{x}$ définies sur $\mathbb{R}$ sont impaires.

Exercice 8

Etudier la parité de la fonction f définie par ;

$$f(x) = \left(\frac{x^3}{1+x^2}\right)^2 \times \frac{x^5}{\sqrt{1+4x^2}}$$

Exercice 9

Que dire d'une fonction à la fois paire et impaire ?

Exercice 10

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissantes et paires.

V.3 - Injectivité-surjectivité-bijectivité

Définition 7 : *Injectivité*

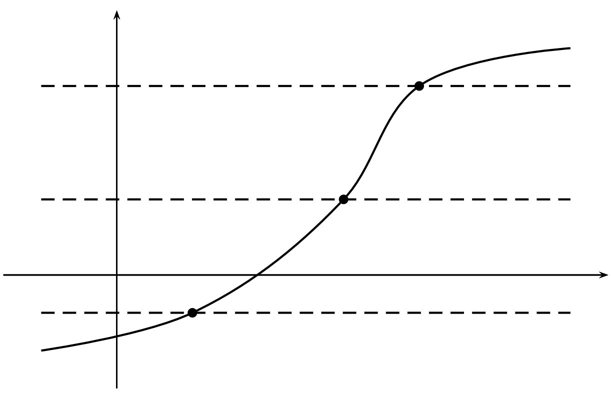
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une fonction.
f est **injective** si elle vérifie l'une des propositions équivalentes suivantes :

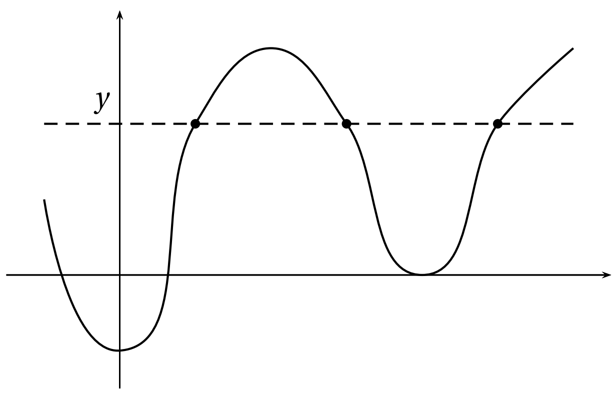
(i) Tout nombre réel de l'ensemble d'arrivée J admet **au plus** un antécédent

(ii) Pour tout réel y de J, l'équation $f(x) = y$ admet **au plus** une solution.

Remarque 3

L'injectivité ou la non-injectivité peut également se voir à l'aide d'un graphique. Une application est injective si toute droite horizontale coupe le graphe en au plus un point, ce qui signifie que toute valeur y est prise au plus une fois.





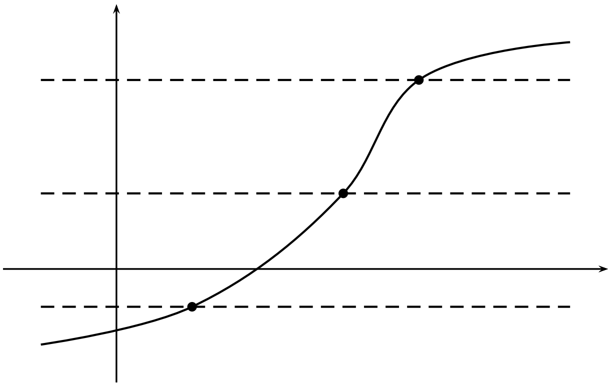
Définition 8 : *Surjectivité*

f est **surjective** si elle vérifie l'une des propositions équivalentes suivantes :

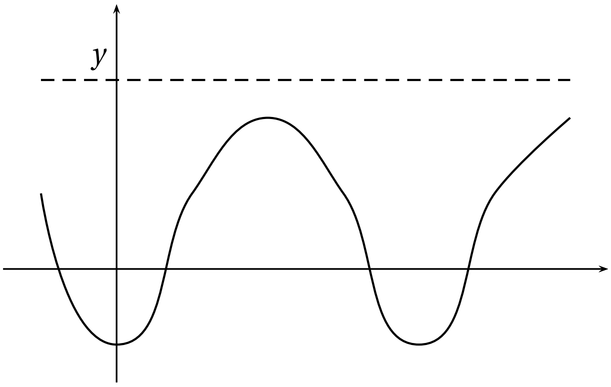
(i) Tout nombre réel de l'ensemble d'arrivée J admet <u>au moins</u> un antécédent

(ii) Pour tout réel y de J, l'équation $f(x) = y$ admet <u>au moins</u> une solution.

La surjectivité ou la non-surjectivité peut également se voir à l'aide d'un graphe. Une application est surjective si toute droite horizontale coupe le graphe en au moins un point, ce qui signifie que toute valeur y est prise au moins une fois.



C'est une surjection
Tout nombre de l'espace d'arrivée a un antécédent



Ce n'est pas une surjection
Certains nombres de l'espace d'arrivée n'ont pas d'antécédent

Définition 9 : *bijectivité*

f est **bijective** si elle vérifie l'une des propositions équivalentes suivantes :

(i) Tout nombre réel de l'ensemble d'arrivée J admet <u>exactement</u> un antécédent

(ii) Pour tout réel y de J, l'équation $f(x) = y$ admet <u>exactement</u> une solution.

(iii) f est à la fois injective et surjective.

Exemples 4

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$
2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$
3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$
4. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -2x + \frac{1}{3} \end{array}$
5. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{2\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x-2} \end{array}$

Proposition 2 : *- Définition*

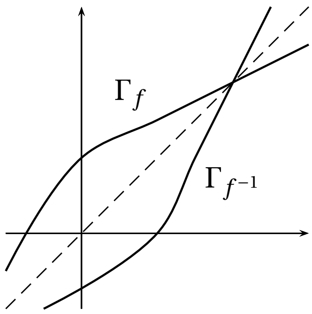
Soit $f : I \to J$ une fonction.
f est bijective si et seulement s'il existe une fonction $g : J \to I$ telle que :

$$(i) \quad \forall x \in I,\ g \circ f(x) = x \qquad (ii) \quad \forall x \in J, \quad f \circ g(x) = x$$

Lorsqu'elle existe, cette fonction g est unique et s'appelle la fonction réciproque de f et se note f^{-1}

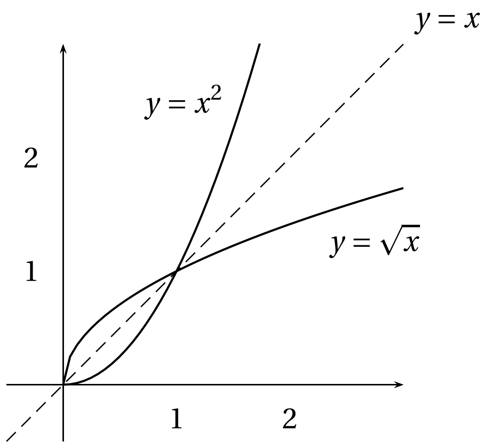
INTERPRÉTATION EN TERMES DE GRAPHES

Supposons que $I = J = \mathbb{R}$. Alors les graphes des applications f et f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice.



Exemple 5

La fonction carrée est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ de réciproque la fonction racine carrée.



Méthode 1

Montrer qu'une application est bijective

- Si on a idée de ce que va valoir f^{-1}, on donne un nom à cette application de J dans I, disons g et on montre que

$$\forall x \in I,\ g \circ f(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in J, \quad f \circ g(x) = x$$

  On prouve que f est bijective de I sur J et même que $f^{-1} = g$.
- Si on n'a pas idée de ce que va valoir f^{-1} mais que f est donnée explicitement par une formule, on écrit « $y = f(x)$ » et on essaie d'exprimer x en fonction de y. On aboutit alors à une expression du type $x = g(y)$. Si on a procédé par *EQUIVALENCE*, on a le droit de dire que f est bijective de réciproque g.
- Dans tous les autres cas, on démontre en deux temps que f est injective et surjective.

Exercice 11

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2+x}{3-x}$.

1. Soit y un réel fixé. Résoudre l'équation $y = \dfrac{2+x}{3-x}$.
2. En déduire que f est injective mais qu'elle n'est pas bijective. Montrer en revanche qu'il existe un réel a tel que f soit une bijection de $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ dans $\mathbb{R}\setminus\{a\}$, et expliciter la bijection inverse.

Exercice 12

1. Montrer que pour tout $x > 2$, $\dfrac{x^2}{x^2-4} > 1$.
2. Montrer que pour tout $x > 1$, $\sqrt{\dfrac{4x}{x-1}} > 2$.
3. On peut donc considérer les applications :

$$f \begin{array}{ccc}]2,+\infty[& \to &]1,+\infty[\\ x & \mapsto & \dfrac{x^2}{x^2-4} \end{array} \quad \text{et} \quad g \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to &]2,+\infty[\\ x & \mapsto & \sqrt{\dfrac{4x}{x-1}} \end{array}$$

Montrer que f est bijective et que $f^{-1} = g$