Chapitre 3

Fonctions usuelles

I - La fonction "logarithme népérien"

Les logarithmes dits "népériens" sont dus au mathématicien écossais John Napier (1550-1617), en France appelé Neper. L'adjectif "népérien" fut inventé un peu plus tard pour lui rendre hommage.

I.1 - Définition du logarithme népérien

Définition 1

La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est l'unique primitive de la fonction inverse sur l'intervalle $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1.
Autrement dit :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \ln'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \ln(1) = 0$$

I.2 - Propriétés du logarithme

Dérivabilité : La fonction ln est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction inverse : $\boxed{\ln(x)' = \frac{1}{x}}$

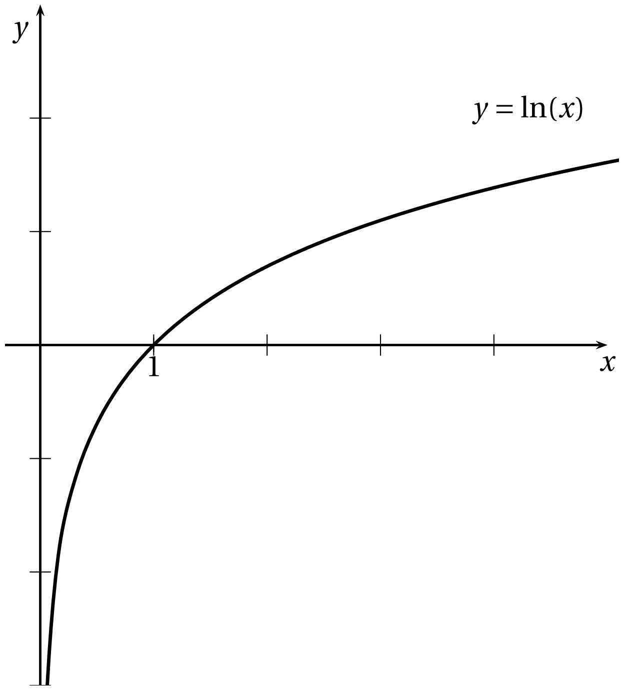
Variations : La fonction inverse étant strictement positive sur $]0,+\infty[$, ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

Propriétés algébriques : Pour tous réels strictement positifs a et b, et tout entier relatif n, on a :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \ln(a\times b) = \ln(a)+\ln(b) & \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a)-\ln(b) \\ \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) & \ln\left(a^n\right) = n\ln(a) \\ \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a) & \end{array}}$$

Dérivabilité d'une fonction composée : Une composée $\ln(u(x))$ est définie ssi $u(x)>0$; elle est alors dérivable et sa dérivée est : $\boxed{\ln(u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}}$

I.3 - Représentation graphique



II - La fonction exponentielle

Définition 2

D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $y \in \mathbb{R}$ il existe un unique $x \in]0, +\infty[$ tel que $\ln x = y$.
Tout nombre strictement positif y admet un unique antécédent $x \in \mathbb{R}$ par la fonction logarithme.
Cet antécédent est noté $\exp(y)$.

La fonction qui à y associe $\exp(y)$ est appelée **fonction exponentielle**, notée exp. Elle est définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Elle est la fonction réciproque de la fonction logarithme.

Définition 3

L'unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $\ln(x) = 1$ est notée e : c'est la **constante de Neper**. On a $e \approx 2,718$.

$$\ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$$

Remarque 1

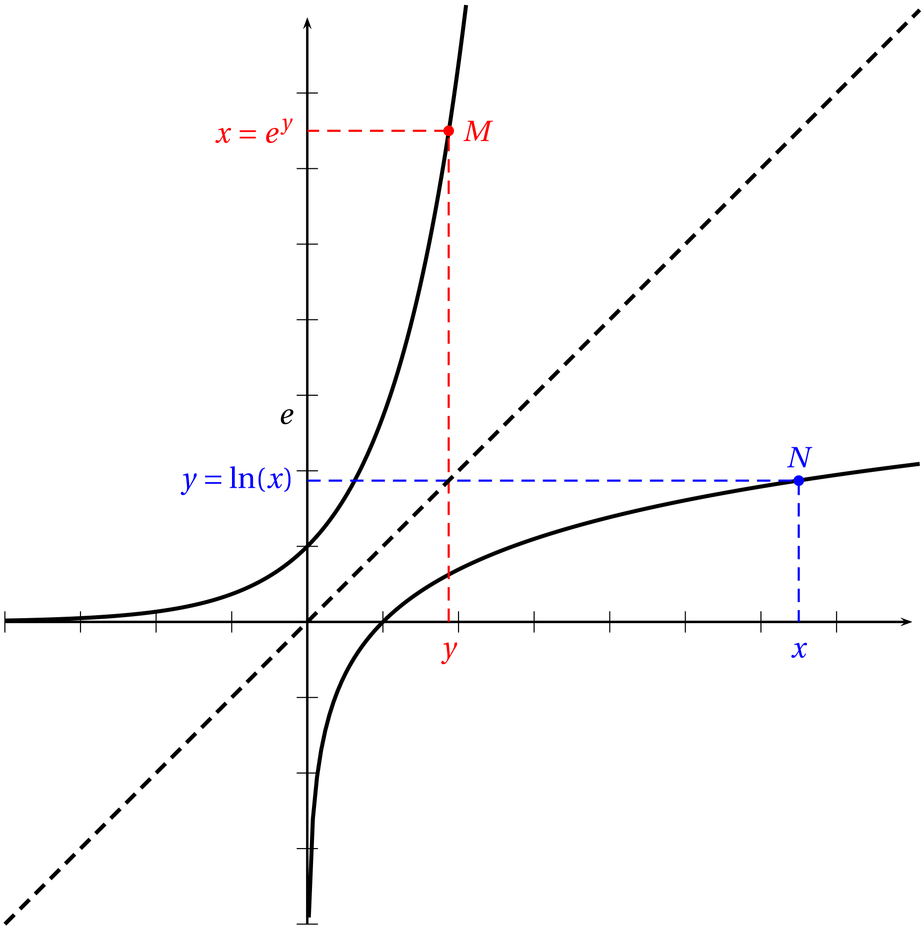
L'équation $\ln(x) = n$(avec $n \in \mathbb{Z}$ admet une unique solution qui n'est autre que le nombre e^n. Ainsi, on convient de noter e^y la solution de l'équation $\ln(x) = y$

$$x = \ln(y) \Leftrightarrow y = \exp(x) = e^x$$

Dans toute la suite, nous utiliserons indifféremment la notation e^x ou $\exp(x)$.

II.1 - Représentation graphique

D'après la construction, la courbe de exp est la courbe obtenue comme symétrique de celle de ln par rapport à la droite d'équation $y = x$: pour tout point $N\,(x; y)$ avec $y = \ln(x)$, on construit son symétrique $M\,(y; x)$ avec $x = e^y$.



Exemples :

Puisque $\ln(1) = 0$, le point $N\,(1;0)$ est sur la courbe de la fonction logarithme népérien ; son symétrique est le point $M\,(0;1)$ donc on a $e^0 = 1$.

Puisque $\ln(e) = 1$, le point $N\,(e;1)$ est sur la courbe de la fonction logarithme népérien ; son symétrique est le point $M\,(1;e)$ donc on a $e^1 = e$.

II.2 - Propriétés de l'exponentielle

Par définition, on a $\ln(\exp(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\exp(\ln(y)) = y$ pour tout $y > 0$. Ou encore :

$$\boxed{\ln(e^x) = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}} \qquad \boxed{e^{\ln(y)} = y \text{ pour tout } y > 0}$$

$$\begin{tikzcd} x = \ln(y) \arrow[rr, bend left, "exp"] & & y = e^x \arrow[ll, bend left, "\ln"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} y = e^x \arrow[rr, bend left, "\ln"] & & \ln(y) = x \arrow[ll, bend left, "exp"] \end{tikzcd}$$

Variations : Par symétrie, la courbe de la fonction ln étant strictement croissante, il en est de même de celle de la fonction exponentielle.

Propriétés algébriques : Pour tous réels a et b, et tout entier relatif n, on a :

$$\boxed{\begin{array}{lr} e^{a+b} = e^a \times e^b & e^{-a} = \dfrac{1}{e^a} \\ e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b} & e^{na} = (e^a)^n \end{array}}$$

Dérivabilité : La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est égale à elle-même : $\boxed{(\exp(x))' = exp(x)}$

Dérivabilité d'une fonction composée : Une composée $\exp(u(x))$ est dérivable et sa dérivée est :

$$\boxed{\exp(u(x))' = u'(x).\exp(u(x))}$$

Exercice 1

1. Transformer les expressions $\ln(24)$ et $\ln(\sqrt{2})$ en faisant apparaître $\ln(2)$.
2. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{\exp(x^2)}{\exp(2x)} \qquad B = \exp(x^2+1) - (\exp x)^2 \qquad C = \frac{\ln(2x)}{\ln(x)} \qquad D = \exp(-\ln 5)$$

Exercice 2

Soient f et g les applications définies, pour tout réel x, par $f(x) = \ln(1+e^x)$ et $g(x) = -x$.
Déterminer $f \circ g$ puis vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - (f \circ g)(x) = x$.

Exercice 3

On pose $f(x) = x - \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$
Déterminer le domaine de définition de f puis étudier la parité de f

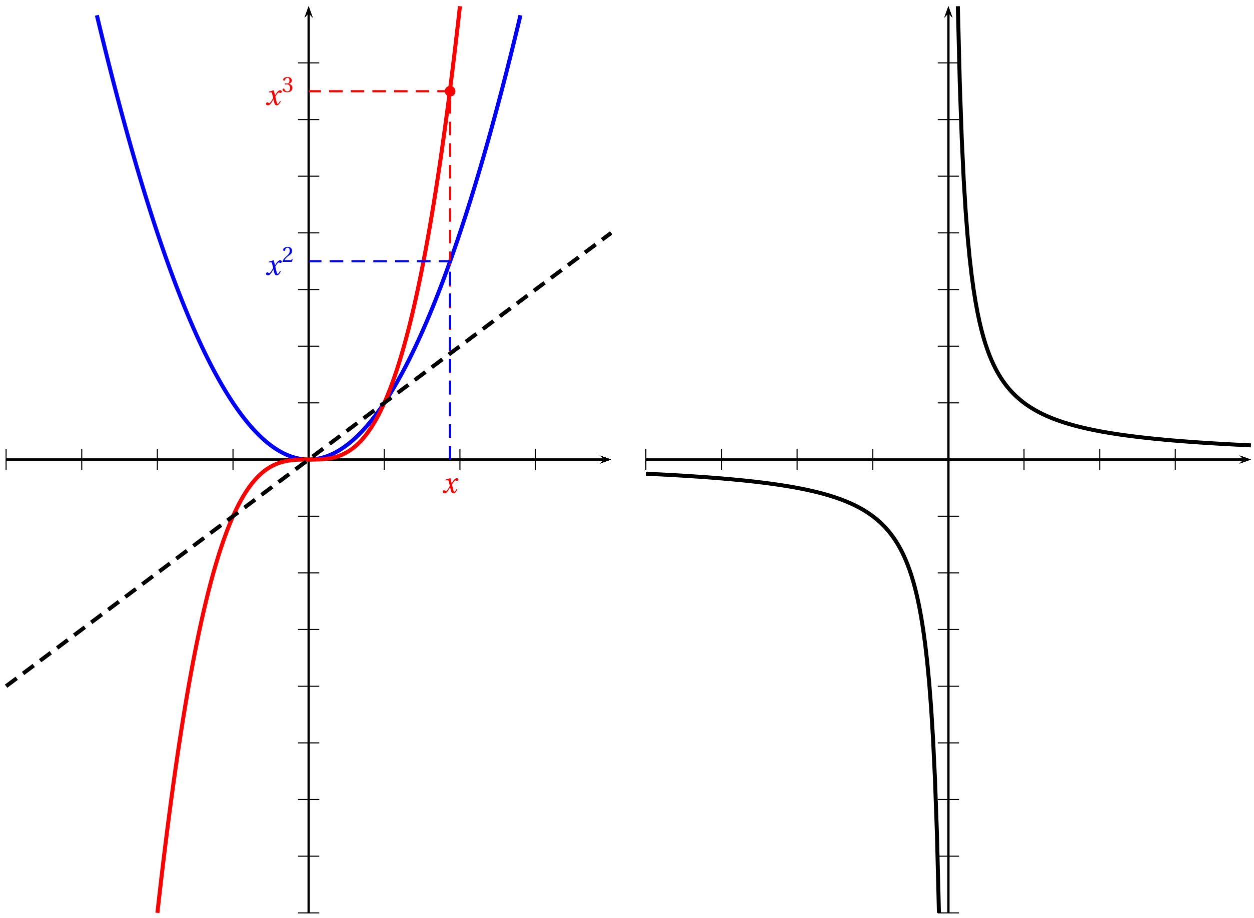
Exercice 4

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x + 2 - 2\ln(e^x + 1)$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est paire.

III - Les fonctions puissances entières

Représentation graphique des fonctions carré, cube et inverse



Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

a) $x^2 \geqslant 2$ *b*) $x^2 \leqslant 2$ *c*) $x^3 \geqslant 1$ *d*) $x^3 \leqslant 1$

e) $(x-1)^2 \geqslant 2$ *f*) $(x+1)^3 \leqslant 1$ *g*) $\dfrac{1}{x-2} < 2$ *h*) $\dfrac{1}{x^2-2} > 4$

IV - les fonctions polynômes

Définition 4

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite polynomiale s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (*)$$

Les réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont alors les coefficients de la fonction polynomiale f.

☞ On parle plus couramment de « polynôme »au lieu d'application polynomiale.

Exemple 1

- la fonction $x \mapsto 0$ est appelée le polynôme nul.
- les fonctions constantes sont polynomiales ;
- plus généralement, les fonctions affines sont polynomiales ;
- on a rencontré à de multiples reprises les fonctions de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$;
- la fonction $x \mapsto x^3$ une fonction polynomiale.

Proposition 1 : *Unicité de l'écriture*

Deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si elles ont les mêmes coefficients :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_p x^p$$

$$\Leftrightarrow$$

$$p = n \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![0, n]\!], \quad a_i = b_i$$

Remarque 2

Soit $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme. Si $\forall x \in \mathbf{R},\ P(x) = 0$, alors tous les coefficients a_i sont nuls. C'est un cas particulier d'unicité de l'écriture d'un polynôme.

Ce résultat est important car il nous permet de parler sans ambiguïté des coefficients d'une fonction polynomiale et de définir le degré d'une telle fonction :

Définition 5 : *Degré d'un polynôme*

Soit $P : x \to a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ une fonction polynomiale.
Si $a_n \neq 0$, on dit que P est de **degré** n. On note : $\deg(P) = n$.

☞ Par convention, le polynôme nul est de degré $-\infty$!
☞ Les polynômes constants sont de degré 1. Les trinômes sont des polynômes de degré 2.

Exemple 2

Les fonctions affines sont polynomiales de degré $\leqslant 1$.
Les fonctions constantes, non nulles, sont polynomiales de degré 0.
On connaît bien les fonctions polynomiales de degré deux : leurs représentations graphiques sont des paraboles.

Proposition 2

Soient P et Q deux polynômes non nuls. Alors :

$$\deg(P+Q) = \max(\deg(P);\deg(Q)) \qquad \deg(PQ) = \deg(P)+\deg(Q)$$

Définition 6 : *Racine d'un polynôme*

Soit P une fonction polynomiale. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que α est une **racine** de P si $P(\alpha) = 0$.

☞ On connaît des algorithme simples afin de calculer les racines des polynômes de degré 1 et 2.
☞ Il est facile de fabriquer une fonction polynomiale dont les racines sont données. Par exemple, une fonction polynomiale qui admet 1, 2, et 3 pour racines est :

$$x \longmapsto (x-1)(x-2)(x-3)$$

Proposition 3

Soit P une fonction polynomiale de degré $n \geqslant 1$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une racine de P.
Alors il existe une fonction polynomiale Q, de degré $n-1$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-\alpha)Q(x)$$

Corollaire 1

Soit P une application polynomiale non nulle. Alors P peut s'écrire :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_r)Q(x)$$

où $r \in \mathbf{N}$, les α_i sont des réels (éventuellement égaux) et Q est une application polynomiale qui n'a pas de racine.

Remarque 3

On peut démontrer que le polynôme Q du corollaire peut s'écrire comme un produit de polynômes de degré deux, mais c'est beaucoup plus difficile.

Théorème 1

Tout polynôme de degré n admet au plus n racines.

Exemple 3

Factorisons le polynôme :

$$P(x) = x^3 + x^2 - 2$$

On voit que $x = 1$ est une racine « évidente » de P. Donc il existe un polynôme $Q(x) = ax^2 + bx + c$ tel que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ P(x) = (x-1)Q(x)$$

On peut trouver Q par division euclidienne de P (voir méthode ci-dessous) ou par $x-1$, ou par identification. Après calcul :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ P(x) = (x-1)(x^2 + 2x + 2)$$

De telles factorisation sont très utiles, par exemple pour résoudre l'équation $P(x) = 0$, ou pour étudier le signe de $P(x)$.

Exercice 6

Factoriser les polynômes suivants et trouvez toutes leurs racines :

$$\begin{array}{rcl} P(x) & = & x^3 + x^2 - x + 2 \\ Q(x) & = & x^4 + x^2 - 2 \end{array}$$

Exercice 7

Soient P et Q deux polynômes tel que $P(x) = Q(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. Démontrer que $P(x) = Q(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ (c.a.d. $P = Q$).

Méthode 1

Division euclidienne de polynômes Il est possible de poser des divisions euclidiennes entre polynômes. On ne va pas énoncer de résultat précis à ce sujet et on va se contenter de savoir le faire en pratique.

Faisons quelques rappels sur la division euclidienne des entiers. Si par exemple on divise 17 par 5, on dira que dans 17, il y a 3 fois 5 et qu'il reste 2. Ainsi le quotient est 3 et le reste est 2. On a :

$$17 = 3 \times 5 + 2$$

Avec les polynômes, c'est le même principe. On peut même poser la division comme à l'école primaire !

Posons la division euclidienne du polynôme $x^3 + x^2 - x + 1$ par $x^2 + 1$:

$$\begin{array}{cccc|l} x^3 & +x^2 & -x & +2 & x^2+1 \\ \cline{5-5} x^3 & & +x & & x+1 \\ \cline{1-4} & x^2 & -2x & +2 & \\ & x^2 & & +1 & \\ \cline{2-4} & & -2x & +1 & \end{array}$$

Le reste de cette division euclidienne est $-2x + 1$ et le quotient est $x + 1$. On a donc la relation :

$$x^3 + x^2 - x + 2 = (x^2 + 1)(x + 1) - 2x + 1$$

Remarque 4

Lorsqu'on effectue la division euclidienne de deux polynômes, le reste est un polynôme dont le degré est strictement inférieur au degré du diviseur.

Exercice 8

Effectuer à chaque fois la division euclidienne de A par B :

- $A(x) = x^3$ et $B(x) = x^2 + 3$
- $A(x) = x^4 - 1$ et $B(x) = x^2 + 1$
- $A(x) = x^5 + x^3 - x + 1$ et $B(x) = x + 2$
- $A(x) = x + 1$ et $B(x) = x^2$

V - Les fonctions puissances

V.1 - Généralités

Définition 7

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle **fonction puissance** α, la fonction f_α définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$$

Théorème 2

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction f_α est dérivable (donc continue) sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

Remarque 5

On en déduit que la fonction f_α est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ si $\alpha > 0$ et strictement décroissante si $\alpha > 0$.

Proposition 4

Soient x et y dans $\mathbb{R}_+^*$. Soient α et β dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta \qquad x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha} \qquad x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$$

$$(xy)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha} \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

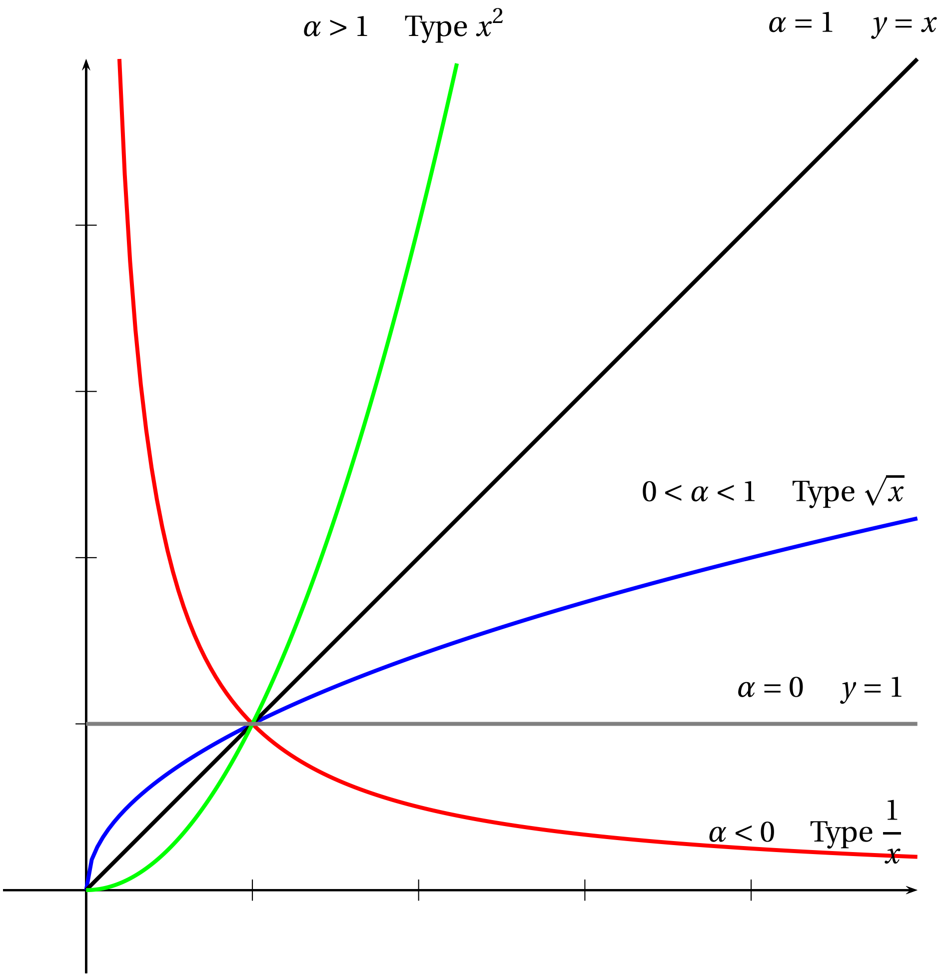
Proposition 5

Soient x et y dans $\mathbb{R}_+^*$. Soient α et β dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta \qquad x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha} \qquad x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$$

$$(xy)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha} \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

Représentation graphique des fonctions puissances



Proposition 6

Soient x et y dans $\mathbb{R}_+^*$. Soient α et β dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta \qquad x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha} \qquad x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$$

$$(xy)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha} \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

V.2 - Un cas particulier : la fonction racine carrée

Définition 8

La fonction **racine carrée** est la fonction r définie sur $[0, +\infty[$ par $r(x) = \sqrt{x}$.

Rappel : par définition, $\sqrt{x}$ est l'unique réel **positif** tel que $(\sqrt{x})^2 = x$.

Proposition 7

La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad r'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Remarque 6

On en déduit que la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Proposition 8

La fonction racine carrée coïncide avec la fonction puissance $\dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

Exercice 9

Démontrer que $\sqrt{4+3\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{4}} + 2^{\frac{3}{4}}$

Exercice 10

Comparer : $\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$; $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Exercice 11

Résoudre : 1. $\sqrt{5x+6} \geqslant x+2$ 2. $\sqrt{2-x}+\sqrt{3+x} \geqslant 1$

Exercice 12

Résoudre l'équation : $4^x - 3.2^x - 10 \geqslant 0$

V.3 - Fonctions de la forme $x \mapsto u(x)^{v(x)}$

L'expression $u(x)^{v(x)}$ est définie pour tout réel x tel que $u(x) > 0$.
Pour étudier une fonction g définie par $g(x) = u(x)^{v(x)}$, il est utile de l'écrire sous forme exponentielle :

$$g(x) = u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}$$

Exercice 13

Déterminer le domaine de définition puis les variations de la fonction $f : x \mapsto x^x$

VI - La fonction valeur absolue

Définition 9

La fonction **valeur absolue**, notée $x \mapsto |x|$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Exemple 4

$|2,9| = 2,9$ mais $|-5,9| = 5,9$. Il est clair que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \geqslant 0$.

Proposition 9

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| = \max(x, -x)$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| = \sqrt{x^2}$

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad |-x| = |x|$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \quad |xy| = |x| \times |y|$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^* \quad \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

Proposition 10 : *Inégalité triangulaire*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \quad |x+y| \leqslant |x| + |y|$$

Proposition 11

La fonction valeur absolue est une fonction paire, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 14

Tracer la courbe représentative de la fonction valeur absolue.

Proposition 12

Soit $x \in \mathbb{R}$ Alors x est la distance entre le point d'origine O d'un axe gradué et le point M d'abscisse x.

Proposition 13

Soient x et y dans $\mathbb{R}$. Alors $|x-y|$ est la distance entre le point d'abscisse x et le point N d'abscisse y d'un axe.

Proposition 14

- $\forall a \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| = a \Leftrightarrow (x = a \quad \text{ou} \quad x = -a)$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| > a \Leftrightarrow (x < -a \quad \text{ou} \quad x > a)$

Exercice 15

Soit la fonction suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{lcll} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} & \\ x & \longmapsto & |x+4| & \text{si } x \leq 0 \\ x & \longmapsto & -2x+1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ x & \longmapsto & x^2 - 2x - 3 & \text{si } 3 \leq x \end{array} \right.$$

1. Donner le tableau des variations de f et tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_f$.
2. Déterminer les antécédents de 0, de 12, de -1, par la fonction f.

Exercice 16

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$a.$ $|x+2|=3$ $b.$ $|x-2|=|2x+3|$ $c.$ $|x-3|+|x-1|=4$ $d.$ $|2x-4|+3|x+1|=10$

2. Résoudre :

$a.$ $|x-5|\leqslant 3$ $b.$ $|2x-4|>8$ $c.$ $|2x-4|<|x-5|$

VII - Fonction partie entière

Définition 10

Soit x dans $\mathbb{R}$. La **partie entière** de x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x, noté $\lfloor x \rfloor$

Exemple 5

$\lfloor e \rfloor = 2$ mais attention, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.

Proposition 15

- Le nombre $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier relatif satisfaisant $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$
- Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a l'encadrement : $x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$

Exercice 17

Tracer la représentation graphique de la fonction partie entière.

Exercice 18

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\lfloor 2x+1 \rfloor = 7$.

Exercice 19

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad 1-x < x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \leqslant 1$

Exercice 20

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \qquad \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$