Chapitre 8

Ensembles

I - Ensembles

I.1 - Généralités

I.1.a - Définitions

Définition 1 : *Ensemble et éléments*

Si $u_1, u_2, \dots, u_p$ (p étant un entier ≥ 1) sont des objets mathématiques quelconques (par exemple des nombres réels), alors on peut former l'**ensemble** :

$$E = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

On dit alors que chaque u_i (pour $1 \leq i \leq p$) est un **élément** de E, ou que u_i *appartient* à E, et on écrit :

$$u_i \in E$$

Voici quelques ensembles importants :

- l'ensemble vide, noté $\emptyset$. Il ne contient aucun élément ;
- l'ensemble $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ des entiers naturels ;
- l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, dont $0, -1, \sqrt{2}, e$ sont des éléments.
- l'ensemble $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et m colonnes.

☞ Rien n'empêche de considérer un ensemble d'ensembles. Par exemple, si $E = \{1, \{2\}\}$, alors $1 \in E$ et $\{2\} \in E$, mais $2 \notin E$.

EGALITÉ ENTRE ENSEMBLES : Deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes éléments.

Remarque 1

L'ordre des éléments d'un ensemble, et leurs éventuelles répétitions n'importent pas. Par exemple :

$$\{1, 2\} = \{2, 1\} = \{1, 1, 2\}$$

CARDINAL D'UN ENSEMBLE Le nombre d'éléments d'un ensemble E est appelé le *cardinal* de E et noté $\operatorname{card}(E)$, ou $|E|$, ou encore $\#E$.
☞ Le cardinal d'un ensemble peut-être infini.
☞ Un ensemble de cardinal 1 est un *singleton*
☞ un ensemble de cardinal 2 est une *paire*.

Remarque 2

La représentation graphique d'un ensemble varie en fonction du contexte. Pour des ensembles finis on utilisera souvent des « diagrammes de Venn ». Ainsi l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ se dessine de la façon suivante :

Par contre, l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels sera en général représenté par une droite.

I.2 - Sous-ensembles

Définition 2

Soient E et F deux ensembles. On dit que F est *inclus* dans E, et on écrit $F \subset E$, lorsque tout élément de F est aussi un élément de E.

Autrement dit :

$$F \subset E \Longleftrightarrow \forall x \in F,\ x \in E$$

Lorsque F est inclus dans E, on dit aussi que F est un **sous-ensemble** de E (ou encore une **partie** de E).

Remarque 3

Étant un ensemble E, il arrivera très souvent que l'on considère l'ensemble F formé des éléments de E vérifiant une certaine propriété P. Un tel ensemble F est évidemment un sous-ensemble de E. Il est noté de la façon suivante :

$$F = \{x \in E,\ x \text{ vérifie la propriété } P\}$$

Cela se lit « F est l'ensemble des x appartenant à E tels que x vérifie la propriété P ».

Exemple 1

L'ensemble des réels x tels que $x^2 - 5x + 4 < 0$ se note $\{x \in \mathbb{R}\ x^2 - 5x + 4 < 0\}$. Bien entendu, cet ensemble peut aussi s'écrire $[1; 4]$.

Remarque 4

L'ensemble vide $\emptyset$ est inclus dans tout ensemble A.

Exercice 1

Vrai ou faux ?

- $\{1, 1\} = \{1\}$
- $2 \in \{\{2\}, 3, \{\{4\}\}, \emptyset\}$
- $\{1\} = \{\{1\}\}$
- $3 \in \emptyset$
- $\emptyset \in \{\emptyset\}$
- $\{1\} \subset \{\{1\}\}$
- $\emptyset \subset \{1\}$

- $\{\{\{3\}\}\}$ a un élément
- $\{n \in \mathbf{N},\ 82 \leq n \leq 99 \text{ et } \exists k \in \mathbf{N},\ n = k^2\} = \emptyset$

Proposition 1 : *« quelques propriétés de l'inclusion »*

Les assertions suivantes sont vraies quelques soient les ensembles A, B, C :
- On a toujours $A \subset A$.
- Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$.
- Si $A \subset B$ et $B \subset A$ alors $A = B$.

Méthode 1

Inclusion et égalité d'ensembles
- Pour montrer une inclusion $A \subset B$, on fixe un élément de A et on montre qu'il appartient à B.
- Pour montrer l'égalité $A = B$, on procède souvent par double inclusion, en montrant que $A \subset B$ et $B \subset A$.

Exercice 2

On considère les ensembles $A = \{x \in \mathbb{R},\ 3 \leqslant x \leqslant 4\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R},\ x^3 - x^2 - x - 5 \geqslant 0\}$. Montrer que $A \subset B$.

I.3 - Ensemble des parties d'un ensemble

Définition 3

Pour tout ensemble E, on note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Exemple 2

L'ensemble $E = \{1, 2\}$ a quatre parties qui sont $\emptyset$ (la seule partie vide), $\{1\}$ et $\{2\}$ (les seules parties à un élément), et $\{1, 2\}$ (la seule partie à deux éléments). Donc :

$$\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

Exercice 3

Expliciter les ensembles suivants :
- $\mathscr{P}(\emptyset)$
- $\mathscr{P}(\{5\})$
- $\mathscr{P}(\{1, 2, 3\})$
- $\mathscr{P}(\{\{1\}\})$
- $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset))$

Terminons cette partie en indiquant quelques notations classiques pour des ensembles utilisés fréquemment :

- Si a et b sont deux réels, $[a,b] = \{x \in \mathbf{R},\ a \leq x \leq b\}$ (on ne rappelle pas les définitions analogues pour $[a,b[,]a,b],]a,b[, [a,+\infty[, \ldots$)
- $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\}$
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$
- $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$
- $\mathbb{N}^* = \{x \in \mathbb{N},\ x \neq 0\}$
- Si a et b sont deux entiers naturels, $[\![a,b]\!] = \{k \in \mathbb{N},\ a \leq k \leq b\}$

II - Opérations sur les ensembles

II.1 - Intersections, unions

Définition 4

Soient E et F deux ensembles.

- On appelle **intersection de** E **et** F, et on note $E \cap F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à E et à F.
- On appelle **union de** E **et** F, et on note $E \cup F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à E ou à F.

Deux ensembles E et F tels que $E \cap F = \emptyset$ sont dits *disjoints*.

Proposition 2

Les assertions suivantes sont vraies pour tous ensembles A, B, C :

1. ... relatives à l'intersection
   - $A \cap B = B \cap A$
   - $A \cap A = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$
   - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
2. ... relatives à l'union
   - $A \cup B = B \cup A$
   - $A \cup A = A$ et $A \cup \emptyset = A$
   - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
3. ... relatives à intersection et l'union
   - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Remarque 5

D'après cette proposition, il n'y a pas besoin de parenthèse dans une expression telle que $A \cap B \cap C$ ou $A \cup B \cup C$.

Exercice 4

Soients A, B, C, D quatre ensemble quelconques. Développer l'expression :

$$(A \cap B) \cup (C \cap D)$$

II.2 - Généralisation à une famille d'ensembles

Plus généralement, si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles :

- leur réunion, notée $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ est définie par :

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \;\; \exists i \in I, x \in A_i$$

- leur intersection, notée $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ est définie par :

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Longleftrightarrow \forall i \in I, x \in A_i$$

Exercice 5

Déteminer les ensembles suivants :

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}], \qquad B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$$
$$C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}], \qquad D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$$
$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [\frac{1}{n}, +\infty], \qquad F = \bigcup_{a\in\mathbb{R}_+^*}]\frac{1}{a}, +\infty[$$

II.3 - Complémentaire d'une partie d'un ensemble

Définition 5

Étant donné un sous-ensemble A d'un ensemble E, on appelle **complémentaire de** A **dans** E (ou simplement **complémentaire de** A), et on note $\complement_E A$ (ou encore $\overline{A}$ quand aucune confusion n'est possible ...), l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A :

$$\overline{A} = \{x \in E,\; x \notin A\}$$

Remarque 6

La notation $\overline{A}$ ne fait pas apparaître l'ensemble E, qui est néanmoins important. On l'utilisera donc seulement lorsque le contexte est suffisament clair.

Proposition 3

Soit E un ensemble. Soient A, B deux parties de E. Alors :

- $\overline{E} = \emptyset$; $\quad \overline{\emptyset} = E$; $\quad \overline{\overline{A}} = A$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$; ; $\quad A \cup \overline{A} = E$
- $\overline{A} \cap B = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Exercice 6

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E. Simplifier l'expression :

$$(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$$

II.4 - Partition

Définition 6

Soit un ensemble E. Une famille $(E_i)_{i \in I}$ de parties non vides de E est une partition de E si :

$$\begin{cases} \bigcup_{i \in I} A_i = E \\ \forall i \in I, \forall j \in I, \quad (i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset) \end{cases}$$

II.5 - Produit d'ensembles

Définition 7

On appelle **produit cartésien** de n ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$, et on note $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$, l'ensemble des suites finies $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ telles que $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n$.

☞ Le produit de n ensembles égaux à E se note simplement E^n.

☞ Par exemple, au lieu de dire « soient x et y deux réels », on peut dire « soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ».

Exemple 3

L'ensemble des couples de réels se note donc $\mathbb{R}^2$. Habituellement, il se représente graphiquement par un plan.

Exercice 7

Soient A une partie d'un ensemble E et B une partie d'un ensemble F. Démontrer qu'en général, le complémentaire de $A \times B$ dans $E \times F$ n'est pas $\complement_E A \times \complement_F B$.

Exercice 8

Exprimer simplement l'intersection $[0,2]^2 \cap [1,3]^2$ (indication : faire un dessin).