Chapitre 5

Coefficients binomiaux

I - Permutations

Définition 1

Soit E un ensemble fini. On appelle **permutation** de E, toute bijection de E dans E.

Remarque 1

- Notation pour $E = \{1, \dots, n\}$:
- Chaque élément apparait exactement une fois et l'ordre compte.

Exemples 1

- $(1;2;3)$ et $(1;3;2)$ sont deux permutations de $\{1;2;3\}$ mais pas de $\{1;2;3;4\}$.
- $\{5;3;4;2;5\}$ n'est pas une permutation car 5 se répète deux fois.

Théorème 1

Le nombre de permutations de E est $n!$

Remarque 2

On utilise les permutations dans les problèmes où l'on veut ordonner tous les éléments d'un ensemble (sans répétition).

Exemples 2

Le nombre de façons de placer 41 élèves sur les 41 chaises de notre salle est le nombre de façon de permuter les 41 élèves sur les 41 chaises, c'est à dire 41 !

Exercice 1

Les 28 tomes d'une encyclopédie sont rangées sur une étagère.

1. Quel est le nombre de rangements possibles ?
2. Quel est le nombre de rangements pour lesquels les tomes I et II apparaissent côte à côte et dans cet ordre sur l'étagère ?
3. Quel est le nombre de rangements pour lesquels les p premiers tomes $(1 \leqslant p \leqslant 28)$ apparaissent côte à côte et dans le bon ordre ?

II - Coefficients binomiaux

Définition 2

Soit E un ensemble fini. On appelle p-**combinaison** de E, toute partie de E à p éléments.

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments est noté $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$.

Remarque 3

1. Les éléments d'une combinaison de p éléments de E sont deux à deux distincts donc $0 \leqslant p \leqslant \text{card}(E)$.
2. L'ordre des éléments d'une combinaison n'a pas d'importance.
3. Les nombres $\binom{n}{p}$ sont aussi appelés les coefficients binômiaux (on verra plus tard la raison de cette appellation).

Exemples 3

Soit $E = \{1, 2, 3\}$.

- Les combinaisons de 2 éléments de E sont $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, et $\{2, 3\}$. On a donc $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3$.
- $\{1; 3\}$ et $\{3; 1\}$ sont deux combinaisons identiques.
- $\{1; 3; 1\}$ est une combinaison que l'on notera plutôt $\{1; 3\}$.

Théorème 2

1. Le nombre $\binom{n}{p}$ est aussi égal au nombre de façons de choisir p objets distincts parmi n objets donnés.
2. Dans un arbre binaire (succés-échec), le nombre $\binom{n}{p}$ est égal au nombre de chemins sur lesquels on obtient p succés lors de n répétitions d'une épreuve aléatoire (on reverra ça dans le chapitre sur la loi binomiale)
3. Le nombre $\binom{n}{p}$ est aussi égal au nombre de suites strictement croissantes (ou strictement décroissantes) de p nombre réels choisis parmi n.

Proposition 1 : *Quelques coefficients binômiaux particuliers*

Pour tous entiers n, on a :

- $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = 1$
- $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = n$
- $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$

Proposition 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, les combinaisons possèdent les propriétés suivantes :

1. $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. (Symétrie)
2. $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. (Formule de Pascal)
3. $\forall k \geqslant 1$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. (Petite formule)

Exemple 4

Coefficients binomiaux pour $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant 6$:

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	**2**	**1**				
3	1	3	**3**	1			
4							
5							
6							

on utilise la proposition précédente :

$$\begin{array}{ccc} \binom{n}{k} & + & \binom{n}{k+1} \\ & & \| \\ & & \binom{n+1}{k+1} \end{array}$$

Théorème 3

Pour tout entiers n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}^{p \text{ facteurs}}}{\underbrace{p(p-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}_{p \text{ facteurs}}}$$

Exercice 2

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\binom{2n+2}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\frac{4^n}{2n} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant \frac{4^n}{2}$.

Exercice 3

Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $p \geqslant 2$,

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n-1}{p} + 2\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p-2}$$

Exemple 5

Pour calculer $\binom{8}{4}$, on peut écrire :

$$\binom{8}{4} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot 5}{4\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1} = 2\cdot 7\cdot 5 = 70$$

On notera qu'il ne faut surtout pas calculer séparément le numérateur et le dénominateur mais qu'il faut plutôt profiter des éventuelles simplifications !

Exercice 4

Un ensemble E possède exactement 55 parties à deux éléments. Quel est le cardinal de cet ensemble ?

Exercice 5

Combien de mains de quatre cartes à jouer (choisies parmi 32) existe-t-il (on précise que, dans une main, on ne tient pas compte de l'ordre des cartes). Parmi ces mains, combien contiennent la dame de Coeur ?

Exercice 6

Démontrer la formule de Pascal en utilisant le théorème précédent.

III - Formule du binôme de Newton

Théorème 4

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que A et B commutent :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

Exercice 7

1. Soit x réel, développer : $(1+x)^4$ puis $(1-x)^4$.
2. Calculer, pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$, $p \in]0,1[$, calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}$; Calculer :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{3^k}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{3^{k+1}}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} (2)^k$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{3^{k-1}}$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} 2^k$

Exercice 9

1. Soit n, p et k dans $\mathbb{N}$ tels que $0 \leqslant p \leqslant k \leqslant n$. Montrer que :
$$\binom{n}{p}\binom{n-p}{n-k} = \binom{n}{k}\binom{k}{p}$$
2. (a) Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{k} \binom{n}{p}\binom{n-p}{n-k}$

   (b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}\binom{k}{p}$ est égal à 0 si $p < n$ et à 1 si $p = n$.

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{i}$ en posant $k = 2n+1-i$.

Exercice 11 (*Moments de la loi binomiale*)

Soit $p \in]0, 1[$, on pose

$$E_n(p) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad M_n(p) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

1. Montrer que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$
2. En déduire que $E_n(p) = np$.
3. Montrer de manière analogue que $M_n(p) = n(n-1)p^2$.