Chapitre 12

Calcul différentiel

I - Nombre dérivé

I.1 - Vocabulaire et première application

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.
La fonction f est dite **dérivable en** x_0 si et seulement le **taux d'accroissement** $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie en x_0.
Dans ce cas, cette limite est appelée le nombre dérivé de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Remarque 1

Pour que $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admette une limite finie en x_0, il faut nécessairement que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-f(x_0)=0$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, c'est à dire encore que f soit continue en x_0. Autrement dit, on a les implications :

- f est non continue en $x_0 \Rightarrow f$ est non dérivable en x_0.
- f est dérivable en $x_0 \Rightarrow f$ est continue en x_0.
  La réciproque est bien évidemment fausse (voir exemple un peu plus loin) !

Exemple 1

1. La fonction carrée f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.
2. Plus généralement, la fonction carrée f est dérivable en tout réel x_0 et $f'(x_0) = 2x_0$.
3. La fonction racine carrée g est dérivable en tout réel strictement positif x_0 et $g'(x_0) = 1$

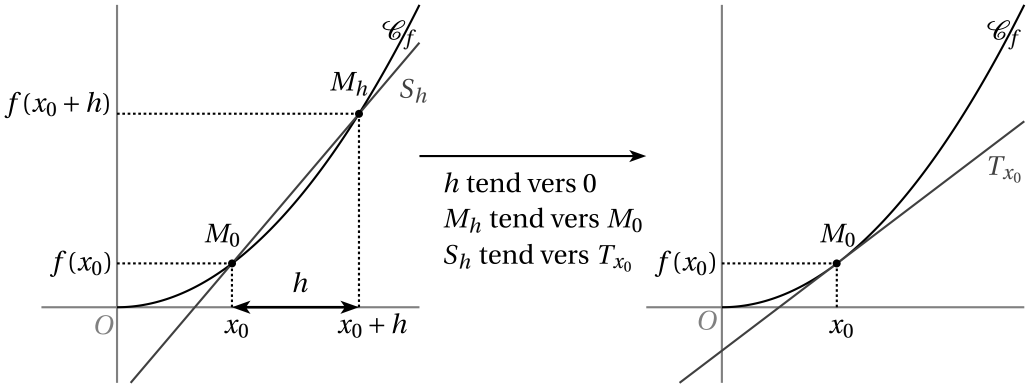
Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2\ln x & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

I.2 - Interprétation géométrique



Proposition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

1. Si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_0.
   L'équation cartésienne réduite de cette tangente est alors :
   $$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
2. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$, alors f n'est pas dérivable en x_0 et la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale au point d'abscisse x_0.

Exercice 2

1. Déterminer la tangente à la fonction carrée) au point d'abscisse 1.
2. Donner une fonction usuelle admettant une tangente verticale.

I.3 - Développement limité d'une fonction à l'ordre 1

Définition 2

Soir f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0. On dit que f **admet un développement limité à l'ordre 1** lorsqu'il existe deux réels a et b tels que :

$$f(x_0 + h) = a + bh + h\varepsilon(h), \qquad \text{avec} \qquad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

Remarque 2

1. De manière équivalente, on peut dire que pour x suffisament proche de x_0, on a $f(x) = a + b(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0)$, toujours en posant $c = x_0 + h$.
2. La quantité $h\varepsilon(h)$ est, par définition, négligeable devant h lorsque h tend vers 0. On peut alors la noter $o(h)$ ce qui se lit « petit o de h »(il est sous entendu que c'est au voisinage de 0). L'égalité de la définition précédente s'écrit donc : $f(x_0 + h) = a + bh + o(h)$.
   De la même manière, on peut noter $f(x) = a + b(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0)$ (« petit o de $x - x_0$ au voisinage de x_0 »)
3. Le DL est dit à l'ordre 1 car la quantité $a + bh$ est un polynôme de degré 1 en la variable h. On peut *à priori* définir les DL à tous les ordres.
   Le $\mathrm{DL}_0(x_0)$ de f s'écrit $f(h) = a + \varepsilon(h)$, avec a réel et $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.
   Le $\mathrm{DL}_2(x_0)$ de f s'écrit $f(h) = a + bh + ch^2 + h^2\varepsilon(h)$, avec a, b, c réels et $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

4. L'idée des DL est de faire l'approximation d'une fonction par un polynôme, de manière **locale** (l'égalité n'est valable que lorsque h est proche de 0, c'est à dire lorsque x est proche de x_0).

Théorème 1

Les deux proposition suivantes sont équivalentes :

(i) f est dérivable en x_0

(ii) f admet un développement limité à l'ordre 1

Le DL est alors unique et, nécessairement : $a = f(x_0)$ et $b = f'(x_0)$.
Autrement dit, pour h suffisamment proche de 0, ou encore pour x suffisamment proche de x_0 : $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$ ou encore $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0)$.

Remarque 3

Lorsque x et suffisamment proche de x_0, cela signifie que la courbe représentative de f est très proche de sa tangente en x_0. On parle d'approximation affine : $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
Pour des valeurs de x suffisamment proches de x_0, T_{x_0} est en fait la droite la plus proche de la courbe représentative de f.

Exercice 3

1. Donner les développements limités à l'ordre 1 en 0 de :
$x \mapsto e^x$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, $x \mapsto \sqrt{1+x}$, $x \mapsto e^{-x}$, $x \mapsto \ln(1-x)$.
2. Donner les développements limités à l'ordre 1 en 1 de $x \mapsto \sqrt{1+x}$, $x \mapsto \sqrt{1-x}$ et $x \mapsto \ln(x)$.
3. En utilisant l'approximation affine pour une fonction f supposée dérivable sur $\mathbb{R}$, donner une valeur approchée de $f(3,05)$ sachant que $f(3) = 1$ et $f'(3) = 6$.

Exercice 4 (*Ecricome 2012*)

On considère la fonction définie sur l'ensemble des réels positifs par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

II - Nombre dérivé à gauche ou à droite

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

La fonction f est dite **dérivable à droite en** x_0 si et seulement le **taux d'accroissement** $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie en x_0^+.
Dans ce cas, cette limite est appelée le **nombre dérivé à droite** de f en x_0 et est notée $f'_d(x_0)$:

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

On définit de même, sous réserve d'existence, $f'_g(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Proposition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

- S'ils existent, alors $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ sont respectivement les coefficients directeurs des demi-tangentes à droite et à gauche à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_0.
- Si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$, alors f n'est pas dérivable en x_0 et la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale au point d'abscisse x_0. Idem à gauche

Proposition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si $\begin{cases} f \text{ est dérivable à droite et à gauche en } x_0 \\ \text{et} \\ f'_d(x_0) = f'_g(x_0) \end{cases}$

Définition 4

Si $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent mais sont différents, alors f n'est pas dérivable en x_0 et on dit que le point d'abscisse x_0 est un **point anguleux** de $\mathscr{C}_f$.

Exemple 2

la fonction valeur absolue est dérivable à droite et à gauche en 0 mais n'est pas dérivable en 0. Le point $O(0,0)$ est un point anguleux de la courbe représentative de la fonction valeur absolue.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^3 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 3\ln(x) + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue en 1.
2. Etudier la dérivabilité de f en 1.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Etudier la dérivabilité de f en 0.

Théorème 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.
Si f est dérivable en x_0 et si f présente un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

III - Dérivabilité sur un intervalle

III.1 - Fonction dérivée

Définition 5

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I.
Si f est dérivable en tout réel x de I, on dit que f est dérivable sur I

De plus la fonction $f' : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$ est appelée la fonction dérivée de la fonction f.

Exemples 3

1. Si $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ alors $f' : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x \end{cases}$
2. Si $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$ alors $g' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$.

III.2 - Fonctions usuelles

Dans les tableaux suivants, les fonctions f sont dérivables sur $\mathscr{D}_f$:

$\mathscr{D}_f$	$f(x)$	$\mathscr{D}_{f'}$	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	$x^n (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}^*$	$x^p (p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$	$\mathbb{R}^*$	px^{p-1}
$\mathbb{R}_+^*$	$x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$

$\mathbb{R}_+$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}$	$\exp(x)$	$\mathbb{R}$	$\exp(x)$
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$

Exemples 4

Déterminer la fonction dérivée de $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x^3} \end{cases}$.

III.3 - Opérations sur les dérivées

Proposition 4

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et soit λ un réel. Alors :

- $u + v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$.
- uv est dérivables sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.
- si de plus, v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Proposition 5

Soit f une fonction dérivable sur I et g une fonction dérivable sur un intervalle J inclu dans $f(I)$. Alors $g\circ f$ est dérivable sur I
Si f est dérivable en tout réel x de I, on dit que f est dérivable sur I et on a : $(g\circ f)' = (g'\circ f)\times f'$.
Autrement dit :

$$\forall x\in I,\quad (g\circ f)'(x) = g'(f(x))\times f'(x)$$

Exercice 7

Soit h la fonction définie par $h(x)=\ln(x^2+3)$. Déterminer $h'(x)$.

Proposition 6

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$,la fonction u^n est dérivable sur I et sa dérivée vaut $nu'u^{n-1}$.
2. la fonction e^u est dérivable sur I et sa dérivée vaut $u'e^u$.
3. si la fonction u est strictement positive sur I, alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et sa dérivée vaut $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
4. si la fonction u est strictement positive sur I, alors pour tout réel α, la fonction u^α est dérivable sur I et sa dérivée vaut $\alpha u'u^{\alpha-1}$.
5. Si la fonction u est strictement positive sur I, alors la fonction $\ln(u)$ est dérivable sur I et sa dérivée vaut $\dfrac{u'}{u}$.

Exercice 8

Donner l'ensemble de dérivation et la dérivée des fonction définies par :

1. $f(x)=(x^3+2x)^5$.
2. $g(x)=\sqrt{x^2+1}$.
3. $h(x)=\sqrt[3]{x^2+x+1}$

Exemples 5

- Toute fonction polynôme est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction logarithme népérien est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x^2\ln(x) & \text{si} \quad x>0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \end{cases} \end{array}$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

IV - Dérivation et fonctions réciproques

Généralement à l'aide du théorème de la bijectivité (fonction strictement monotone et continue sur un intervalle I), on montre qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ réalise une bijection de I sur $f(I)$.
Ceci assure alors l'existence de sa fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$.
La proposition ci-dessous permet de justifier la dérivabilité de f^{-1} en un point y_0 lorsque l'on sait que la fonction f est dérivable en $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

Proposition 7 : *Dérivabilité d'une fonction réciproque*

: Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.
Soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$ c'est à dire que $x_0 = f^{-1}(y_0)$, alors :

1. Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

2. Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) = 0$ alors f^{-1} n'est pas dérivable en y_0 et sa courbe $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ possède une tangente verticale en y_0.

Exercice 10

Soit une fonction f définie par :

$$f : x \to \frac{x}{x^2 + x + 1}$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $[-1, 1]$ sur un intervalle J à expliciter;
2. On note g sa réciproque. Donner le domaine de définition de g ainsi que ses variations.
3. La fonction g est-elle dérivable en 0 ? en $\frac{1}{3}$? en $-\frac{2}{3}$? en -1 ?
   Si oui, calculer les dérivées correspondantes.
4. Déterminer l'intervalle de dérivabilité de g.

V - Dérivation et monotonie

Théorème 3

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :

1. f est croissante sur $I \iff \forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0$.
2. f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I, \quad f'(x) \leqslant 0$.
3. f est constante sur $l \iff \forall x \in I, \quad f'(x) = 0$

Remarque 4

Le théorème est faux si I n'est pas un intervalle : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = 0$ et pourtant fn'est pas une fonction constante. En effet, $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

Proposition 8

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. si $\forall x \in I, \quad f'(x) > 0$ alors la fonction est strictement croissante sur I.
2. si $\forall x \in I, \quad f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Remarque 5

La réciproque de cette proposition est fausse ! Ainsi la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais pourtant sa dérivée s'annule en 0.

Proposition 9

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. si $\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0$ et si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de valeurs sur I, alors la fonction est strictement croissante sur I.
2. si $\forall x \in I, \quad f'(x) \leqslant 0$ et si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de valeurs sur I, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Exemple 6

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

VI - Inégalité des accroissements finis

Théorème 4 : *I.A.F. version 1*

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que :

$$\forall x \in]a, b[\qquad m \leqslant f'(x) \leqslant M$$

Alors :

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$$

Exercice 11

Montrer que pour tous réels a et b tels que $a < b < -1$, on a :

$$0 \leqslant e^b - e^a \leqslant \frac{1}{e}(b-a)$$

Exercice 12

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$$

Théorème 5 : *I.A.F. version 2*

Soit f une fonction dérivable sur I. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I \qquad |f'(x)| \leqslant k$$

Alors :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2 \qquad |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant k|x_1 - x_2|$$

Remarque 6

- dans cette deuxième version du théorème, les réels x_1 et x_2 sont rangs dans un ordre quelconque, alors que dans la première version du théorème, les réels a et b vérifient $a < b$.
- rappelons l'équivalence :

$$\forall x \in I \qquad |f'(x)| \leqslant k \Longleftrightarrow \forall x \in I \qquad -k \leqslant f'(x) \leqslant k$$

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=1+\ln(x+1)$. Montrer que :

$$\forall (x,y)\in [1,+\infty[^2 \quad |f(x)-f(y)|\leqslant \frac{1}{2}|x-y|$$

Remarque 7

La deuxième version de l'inégalité des accroissements finis permet parfois d'étudier la convergence de suites définies par récurrence comme dans l'exercice ci-dessous

Exercice 14

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1}=f(u_n)=u_n+\frac{1}{4}(2-u_n^2)$.

1. Etudier les variations de f et montrer que $f([1,2])\subset[1,2]$.
2. Montrer que pour tout entier n dans $\mathbb{N}$, $u_n\in[1,2]$.
3. Montrer que si (u_n) converge vers l alors $l=\sqrt{2}$.
4. Montrer que pour tout $t\in[1,2] \quad : \quad |f'(t)|\leqslant \frac{1}{2}$.
5. Montrer que pour tout entier n dans $\mathbb{N}$: $|u_{n+1}-\sqrt{2}|\leqslant \frac{1}{2}|u_n-\sqrt{2}|$, puis que : $\quad |u_n-\sqrt{2}|\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
6. En déduire la convergence de la suite (u_n).

VII - Dérivées d'ordre supérieur

Définition 6

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Pour un entier naturel non nul k, on définit **la dérivée d'ordre k** de f (sous réserve d'existence) notée $f^{(k)}$, par : $f^{(k)}=\left(f^{(k-1)}\right)'$, avec pour convention $f^(0)=f$

Remarque 8

$$f^{(0)}=f,\quad f^{(1)}=f',\quad f^{(2)}=f'' \text{ et } \forall (h,k)\in\mathbb{N}^2 \quad \left(f^{(h)}\right)^{(k)}=f^{(h+k)}=\left(f^{(k)}\right)^{(h)}$$

Remarque 9

La notation $f^{(k)}$ n'a rien à voir avec la notion de puissance!!!

Exercice 15

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.

1. Calculer $f^{(k)}(x)$ pour $k\in[\![1,4]\!]$ et $x\in\mathbb{R}^*$
2. Conjecturer une formule générale pour $f^{(n)}(x)$ puis la démontrer par récurrence sur n.

Définition 7

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit k dans $\mathbb{N}^*$. On dit que f est **de classe** $\mathscr{C}^k$ sur I si et seulement si f admet une dérivée d'ordre k sur I et si $f^{(k)}$ est continue sur I.

Remarque 10

- Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, alors f'' existe donc f' est dérivable sur I donc en particulier f' est continue sur I donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
- Plus généralement, si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I, alors f est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I, pour tout $p \in [\![1, k]\!]$.

Définition 8

Soit f une fonction définie sur un intervalle On dit que f est **de classe** $\mathscr{C}^\infty$ sur I si et seulement si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I pour tout k dans $\mathbb{N}^*$.

Exemples 7

- Les fonctions polynômes sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \exp^{(k)} = \exp$.
- Les fonctions ln et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 10

Soit k dans $\mathbb{N}^*$.

- Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur I, alors $f+g$, fg et λf (avec $\lambda \in \mathbb{R}$) sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.
- Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et si g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.
- Si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et si g est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J, avec $J \supseteq f(I)$ alors $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

VIII - Convexité

VIII.1 - Convexité et concavité pour des fonctions quelconques

Définition 9

1. Une fonction est dite **convexe** sur un intervalle I si
$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall (t_1, t_2) \in [0;1]^2 \text{ tels que } t_1 + t_2 = 1 : f(t_1 x_1 + t_2 x_2) \leqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2)$$
2. Une fonction est dite **concave** sur un intervalle I si
$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall (t_1, t_2) \in [0;1]^2 \text{ tels que } t_1 + t_2 = 1 : f(t_1 x_1 + t_2 x_2) \geqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2)$$
3. On appelle point d'inflexion de C_f, un point d'abscisse x_0 tel que f change de convexité en x_0.

Remarques 11

1. Dire que f est concave sur I revient donc à dire que $-f$ est convexe sur I
2. Graphiquement, dire que f est convexe sur $I = [a, b]$ revient à dire que l'arc de courbe joignant les points d'abscisses a et b est en dessous de la corde, c'est à dire la droite joignant ces deux points. C'est le contraire si f est concave.

Exercice 16

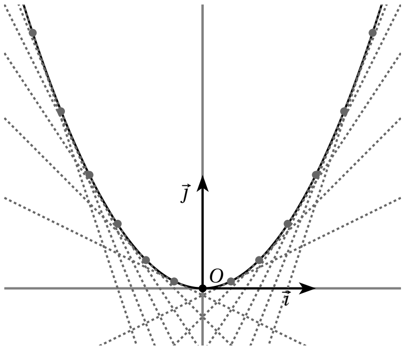
1. Donner des fonctions usuelles qui ont l'air convexes, concaves, possèdant un point d'inflexion.
2. En admettant ces résultats de convexité, justifier les inégalités suivantes :
   (a) $e^x \leqslant (e-1)x + 1$ sur $[0, 1]$.
   (b) $\ln(x) \geqslant \dfrac{x-1}{e-1}$ sur $[1, e]$.

VIII.2 - Convexité pour les fonctions dérivables

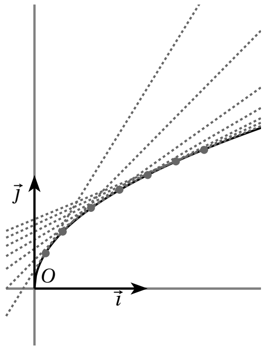
Théorème 6

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, de courbe $\mathscr{C}_f$

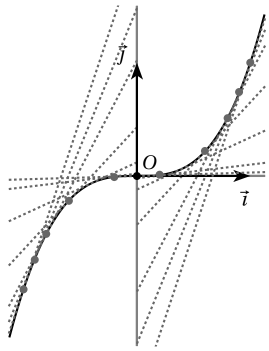
- La fonction f est **convexe** sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
- La fonction f est **convexe** sur I si et seulement si sa courbe est située au dessus de chacune de ses tangentes.
- La fonction f est **concave** sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.
- La fonction f est **concave** sur I si et seulement si sa courbe est située au dessous de chacune de ses tangentes.
- Le point A d'abscisse x_0 de la courbe $\mathscr{C}_f$ est un **point d'inflexion** si et seulement si f' change de monotonie en x_0 (donc si f' admet un extremum local en x_0.
- Le point A de la courbe $\mathscr{C}_f$ est un **point d'inflexion** si et seulement si la tangente en A traverse la courbe.



La fonction carrée est convexe sur $\mathbb{R}$.



La fonction racine carrée est concave sur $]0;+\infty[$.



O point d'inflexion. La fonction cube est concave sur $\mathbb{R}^-$, convexe sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 17

Donner l'équation de la tangente T_{x_0} à la parabole $\mathscr{P}$ de la fonction $f : x \mapsto x^2$ au point d'abscisse x_0.
Etudier la position relative de T_{x_0} et $\mathscr{P}$. Conclure.
En déduire que pour $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{x^2+1}{2} \geqslant \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2$.

VIII.3 - Convexité pour les fonctions deux fois dérivables

Comme la plupart des fonctions étudiées sont au minimum deux fois dérivables, le théorème suivant s'avère être le plus pratique de tous pour étudier la convexité des fonctions :

Théorème 7

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle I. Alors :

- La fonction f est convexe sur $I \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad f"(x) \geqslant 0$.
- La fonction f est concave sur $I \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad f"(x) \leqslant 0$.
- le point d'abscisse x_0 de $\mathscr{C}_f$ est un point d'inflexion si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe.

Exemples 8

1. La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction logarithme népérien est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. La fonction cube est concave sur $\mathbb{R}_-$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$

Exercice 18

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant x+1$
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leqslant x-1$.

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$.

1. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et étudier la dérivabilité en 0 du prolongement.
2. Etudier f
3. Etudier la convexité de f et montrer que la courbe représentative de f admet un point d'inflexion. Déterminer l'équation de la tangente en ce point.