## Probabilités - Chapitre 18

# Variables aléatoires à densité

## I - Variables aléatoires à densité

### I.1 - Rappels sur les fonctions de répartition

**Définition 1 :** *Fonction de répartition d'une variable aléatoire*

Si $X$ est une variable aléatoire, la fonction de répartition de $X$ est la fonction $F_X$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P([X \leqslant x]).$$

**Proposition 1 :** *Caractérisation d'un fonction de répartition*

Une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire $X$ si et seulement si :

1. $F$ est croissante sur $\mathbb{R}$ ;
2. $F$ est continue à droite en tout point ;
3. $F$ admet des limites en $-\infty$ et $+\infty$ et vérifie $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

### I.2 - Densité de probabilité

**Définition 2**

Soit $X$ une variable aléatoire et $F_X$ sa fonction de répartition.
On dit que $X$ est **une variable aléatoire à densité** s'il existe une fonction $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

1. $f_X$ est positive sur $\mathbb{R}$ ;
2. $f_X$ est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points ;
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t = 1$ ;
4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$.

On dit alors que la fonction $f_X$ est **une densité** de la variable aléatoire $X$.

**Remarque 1**

- La fonction $f_X$ n'est pas unique c'est pourquoi on dit que c'est **une** densité de $X$. En effet si $g$ est une fonction égale à $f_X$ sauf en un nombre fini de points alors $g$ est aussi une densité de $X$.
- La fonction de répartition est une primitive de la densité.

Le théorème suivant permet de déterminer si une fonction $f$ donnée est une densité de probabilité d'une variable à densité $X$.

**Théorème 1**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

1. $f$ est positive sur $\mathbb{R}$ ;
2. $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points ;
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.



Alors il existe une variable aléatoire $X$ telle que $f$ soit une densité de la variable $X$. On dit alors que $f$ est une **densité de probabilité**.

**Méthode 1 :** *Obtenir la fonction de répartition à partir d'une densité*

Soit $f$ une fonction réelle.

- On peut vérifier que $f$ est une densité d'une variable aléatoire $X$ en utilisant le théorème 1.
  On la notera alors $f_X$.
- Dans ce cas, la fonction de répartition de $X$ est alors donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Exercice 1**

Montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$ est une densité de probabilité

**Exercice 2**

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est une densité de probabilité d'une variable $X$. Donner la fonction de répartition de $X$.

**Exercice 3**

Soit $f$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est une densité de probabilité.
2. La durée de vie d'un certain composant électronique est une variable aléatoire $X$ dont une densité est $f$ (on dit que $X$ suit la *loi de Rayleigh*)
   (a) Déterminer la fonction de répartition de $X$, notée $F$.
   (b) Déterminer le réel $\mu$, appelé *médiane* de $X$, tel que $F(\mu) = \dfrac{1}{2}$.
3. On appelle *mode* de $X$ tout réel $x$ en lequel $f$ atteint son maximum. Montrer que $X$ a un seul mode $M_0$ et le déterminer.

## I.3 - Caractérisation par la fonction de répartition

**Théorème 2**

Si $F$ est la fonction de répartition d'une variable à densité $X$ et si $f$ est une densité de $X$ alors :

- $F$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points et lorsque $F$ est dérivable en $x$, $F'(x) = f(x)$.

Le théorème suivant permet de déterminer si une fonction $F$ donnée est la fonction de répartition d'une variable à densité $X$.

**Théorème 3**

Soit $F$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

1. $F$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ ;
2. $F$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points ;
3. $F$ est croissante sur $\mathbb{R}$ ;
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Alors il existe une variable aléatoire à densité $X$ telle que $F$ soit la fonction de répartition de $X$.
De plus, si $f$ est une fonction positive telle que $F'(x) = f(x)$ en tout point $x$ où $F$ est dérivable, alors $f$ est une densité de $X$.

**Méthode 2 :** *Obtenir une densité à partir de la fonction de répartition*

Soit $F$ une fonction réelle.

- On peut vérifier que $F$ la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité $X$ en utilisant le théorème 3.
- Dans ce cas, on obtient une densité de $X$ en dérivant la fonction $F$ (quand c'est possible) :

$$f_X(x) = F'(x).$$

**Exercice 4**

Soit $F$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 - \dfrac{8}{x^3} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$.

1. Montrer que $F$ est la fonction de répartition d'une variable à densité $Z$.
2. Déterminer une densité de $Z$.

## I.4 - Quelques propriétés

**Proposition 2**

Soit $X$ une variable aléatoire admettant une densité $f_X$. On note $F_X$ sa fonction de répartition.

1. Pour tout réel $x$, on a :

$$P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t = F_X(x) \qquad \text{et} \qquad P(X \geqslant x) = \int_{x}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t = 1 - F_X(x)$$

2. Pour tout réels $a$ et $b$ tels que $a \leqslant b$, on a :

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f_X(t)\,\mathrm{d}t = F_X(b) - F_X(a)$$

3. Pour tout réel $a$, on a :

$$P(X = a) = 0$$



**Remarque 2**

- Les probabilités $P(X \leqslant x)$, $P(X \geqslant x)$ et $P(a \leqslant X \leqslant b)$ s'interprètent comme des aires sous la courbe représentative de la densité $f$.
- On a : $P(X < x) = P(X \leqslant x)$ et $P(a < X < b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b)$.
- Contrairement aux variables discrètes, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(X = x) = 0$. Ainsi la loi de $X$ n'est pas donnée par les probabilités $P(X = x)$ mais plutôt par la fonction de répartition ou de la densité.

**Exercice 5**

Soient $X$ et $Z$ les variables aléatoires définies dans les exercices 2 et 4. Calculer :

- $P(X \leqslant 2)$
- $P(2 < X \leqslant 3)$
- $P(X \geqslant 1)$
- $P(Z < 4)$
- $P(Z \geqslant 0)$
- $P(Z \in [-1, 3[)$

# II - Moments d'une variable aléatoire à densité

## II.1 - Espérance

**Définition 3**

Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$.

Si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$ est **absolument convergente**, on dit que $X$ admet une espérance, notée $E(X)$ et on a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$$

**Exercice 6**

- La variable aléatoire $X$ définie dans l'exercice 2 admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
- Montrer que la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1/x^2 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$ est une densité d'une variable aléatoire $X$. $X$ admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

**Théorème 4 :** *Linéarité de l'espérance*

Soient $X$ et $Y$ deux variable aléatoire à densité admettant une espérance. Soient $a$ et $b$ deux réels.

- Pour tous réels $a$ et $b$, on a : $E(aX + b) = aE(X) + b$.
- Si $X + Y$ est une variable à densité alors elle admet une espérance et on a : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

## II.2 - Théorème de transfert et moment d'ordre $r$

**Théorème 5 :** *Théorème de transfert*

Soient $X$ est une variable aléatoire de densité $f$ et $\varphi$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f_X(t)\,\mathrm{d}t$ est **absolument convergente**, alors la variable aléatoire $\varphi(X)$ admet une espérance et on a :

$$E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Exercice 7**

Soit $X$ la variable aléatoire définie dans l'exercice 2. La variable $e^X$ admet-elle une d'espérance ?

**Définition 4**

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\, \mathrm{d}t$ est absolument convergente alors on dit que $X$ **admet un moment d'ordre** $r$, notée $m_r(X)$ et on a : $m_r(X) = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\, \mathrm{d}t$.

## II.3 - Variance et écart-type

**Définition 5**

Si la variable aléatoire $X$ admet une espérance et si la variable $(X - E(X))^2$ admet une espérance, on appelle **variance de** $X$ le réel

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

**Théorème 6**

Une variable à densité $X$ admet une variance ssi $X$ admet un moment d'ordre 2 et dans ce cas, on a :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

**Exercice 8**

- La variable aléatoire $X$ définie dans l'exercice 2 admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.
- Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 2/x^3 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

  $X$ admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

**Définition 6**

Si $X$ admet une variance alors $V(X) \geqslant 0$. On appelle alors **écart-type** le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

**Proposition 3**

Soit $X$ une variable à densité admettant une variance.
Alors pour tout réels $a$ et $b$, $aX + b$ admet une variance et on a : $V(aX+b) = a^2 V(X)$.

**Définition 7**

- Si $X$ est une variable à densité telle que $E(X) = 0$ on dit que $X$ **est une variable centrée**.
- Si $X$ est une variable à densité telle que $\sigma(X) = 1$, on dit que $X$ **est une variable réduite**.
- Si $X$ admet une espérance et un écart-type non nul, la variable $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est appelée **la variable centrée réduite associée à** $X$.