Probabilités - Chapitre 19

Lois usuelles à densité

I - La loi uniforme

Définition 1 : *Loi uniforme sur un segment*

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a;b]$, notée $\mathscr{U}([a;b])$, si une densité de X est la fonction f définie par :

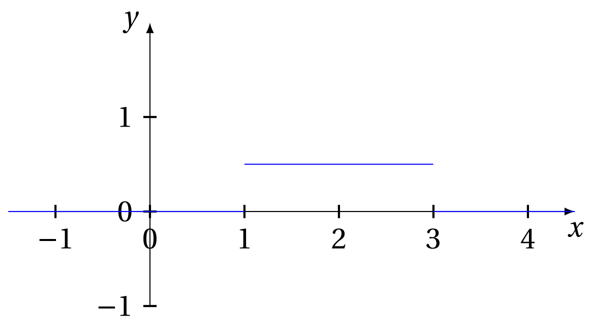
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a;b]\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 1 : *Fonction de répartition pour la loi uniforme*

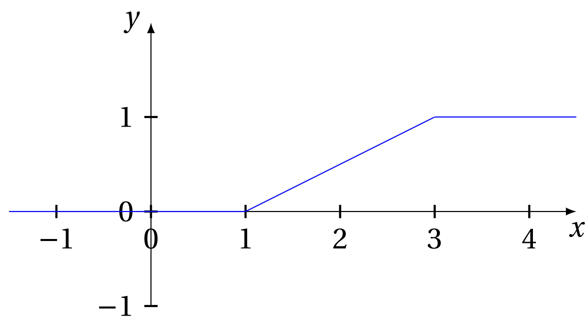
La fonction de répartition d'une variable qui suit la loi $\mathscr{U}([a;b])$ est la fonction F définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a\,; \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a;b]\,; \\ 1 & \text{si } x > b. \end{cases}$$

Exemple 1 ($X \hookrightarrow \mathscr{U}(1;3)$)



$\mathbf{f_X(x)}$



$\mathbf{F_X(x)}$

Proposition 2 : *Espérance et variance pour la loi uniforme*

Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a;b])$, alors X admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Le résultat suivant montre qu'on peut toujours se ramener à une loi uniforme sur $[0,\ 1]$.

Exercice 1

Montrer que :

- $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,\ 1]) \iff Y = (b-a)X + a \hookrightarrow \mathscr{U}([a,\ b])$.

De même, compléter les pointillés

- $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a,\ b]) \iff Y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \hookrightarrow \mathscr{U}([0,\ 1])$.

II - La loi exponentielle

Définition 2 : *Loi exponentielle*

Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ (où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$), notée $\mathscr{E}(\lambda)$, si une densité de X est la fonction f définie par :

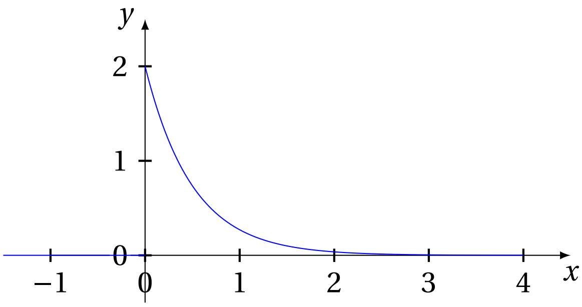
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 3 : *Fonction de répartition pour la loi exponentielle*

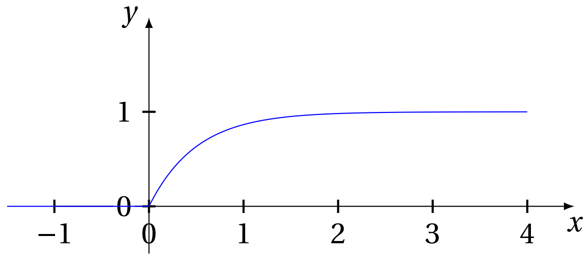
La fonction de répartition d'une variable qui suit la loi $\mathscr{E}(\lambda)$ est la fonction F définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 2 ($X \hookrightarrow \mathscr{E}(2)$)



$\mathbf{f_X(x)}$



$\mathbf{F_X(x)}$

Proposition 4 : *Espérance et variance pour la loi exponentielle*

Si $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, alors X admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Exercice 2

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que :

$$X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda) \iff \lambda X \hookrightarrow \mathscr{E}(1) \qquad \text{et} \qquad X \hookrightarrow \mathscr{E}(1) \iff \frac{1}{\lambda} X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda).$$

Définition 3 : *Loi sans mémoire*

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs positives suit une loi **sans mémoire** lorsque pour tout couple (t, h) de réels positifs,

$$P([X > t+h]) = P([X > t])P([X > h]),$$

ou bien si $P([X > h]) \neq 0$,

$$P_{[X>h]}([X > t+h]) = P([X > t]).$$

Théorème 1 : *Caractérisation de la loi exponentielle*

Les variables aléatoires suivant une loi exponentielle (et la variable quasi-certaine nulle) sont les seules variables aléatoires positives sans mémoire.

III - Les lois normales

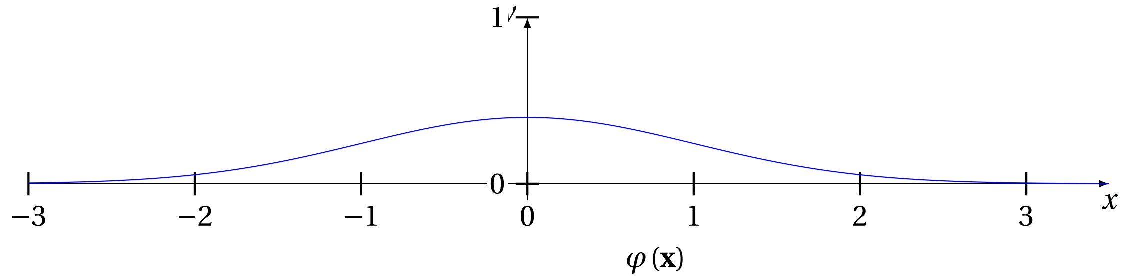
III.1 - La loi normale centrée réduite

Définition 4

Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0,1)$, si une densité de X est la fonction φ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Exemple 3 ($X \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$)



Remarque 1

- La définition précédente implique en particulier que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x = 1.$
- On obtient également la valeur de l'intégrale suivante à retenir : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = \sqrt{2\pi}.$

Proposition 5 : *Fonction de répartition pour la loi normale centrée réduite*

La fonction de répartition d'une telle variable aléatoire est la fonction, notée ϕ, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t.$$

Remarque 2

On ne sait pas exprimer la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite à l'aide des fonctions usuelles. En particulier, on ne connait pas de primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

On dispose par contre de quelques règles de calculs ainsi que d'une table de valeurs.

Proposition 6

- Comme la densité φ est une fonction paire, on a :

$$\phi(0) = P(X \leqslant 0) = \frac{1}{2}$$

- $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\phi(-x) = 1 - \phi(x)$$

- $\forall x \in \mathbb{R}$:
$$P(|X| \leqslant x) = 2\phi(x) - 1$$

Proposition 7 : *Espérance et variance pour les loi normales centrée réduite*

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors X admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = 0 \qquad \text{et} \qquad V(X) = 1.$$

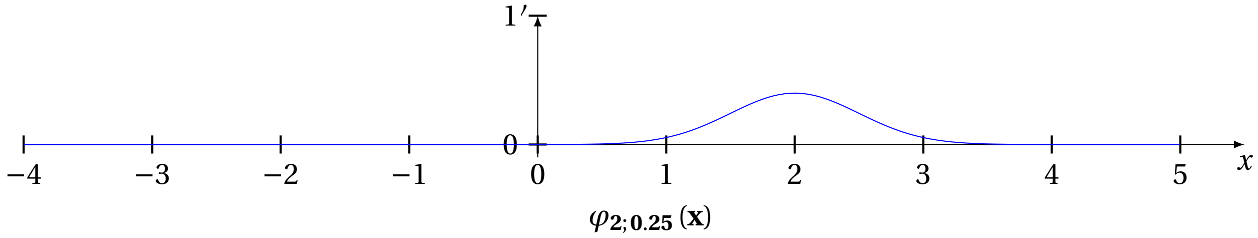
III.2 - La loi de Laplace-Gauss, ou loi normale

Définition 5

Une variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres (m,σ^2), notée $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ (où $\sigma > 0$), si une densité de X est la fonction $\varphi_{m,\sigma}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Exemple 4 ($X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(2;\frac{1}{4}\right)$)



Proposition 8 : *Fonction de répartition pour la loi normale*

La fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ est la fonction, notée $\phi_{m,\sigma}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}t.$$

Toute variable aléatoire suivant une loi normale peut se ramener par une transformation affine à la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Proposition 9 : *Changements de variables normales*

Si X suit une loi normale de paramètres (m,σ^2) ssi $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.
Ainsi :

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2) \iff X^* = \frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Remarque 3

- Cette propriété est primordiale pour l'étude de la convergence de variables aléatoires et de la théorie de l'estimation que nous verrons aux chapitre suivants.
- Noter que la variable $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma} = \dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est la variable centrée réduite associée à X.

Proposition 10 : *Espérance et variance pour les loi normales*

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$, alors X admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = m \qquad \text{et} \qquad V(X) = \sigma^2 \quad \text{donc } \sigma(X) = \sigma.$$