Soutien du 22 janvier 2019

Exercice 1 : Deux changements de variable très classiques :-)

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$. Reconnaître la loi de $T = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-X)$. En déduire comment simuler une loi exponentielle sous Scilab à l'aide de la fonction `rand`.
2. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$ et $Y = \mathrm{e}^X$. Déterminer F_Y en fonction de Φ, puis déterminer une densité f_Y et calculer enfin $E(Y)$, si elle existe, à l'aide d'un changement de variable.

Exercice 2 : EML 2006, exercice3, partie A

1. Soit U une variable aléatoire à densité suivant une loi normale d'espérance nulle et de variance $\frac{1}{2}$
   (a) Rappeler une densité de U
   (b) En utilisant une intégration par partie, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}dx$ est convergente et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \forall x \leqslant 0, \quad F(x) = 0 \\ \forall x > 0, \quad F(x) = 1 - e^{-x^2} \end{cases}$

2. Montrer que la fonction F définit une fonction de répartition de variable aléatoire dont on déterminera une densité f.
3. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.
   (a) Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et que $E(X) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
   (b) Déterminer, pour tout réel y, la probabilité $\mathrm{P}\left(X^2 \leqslant y\right)$. *On distinguera les cas* $y \leqslant 0$ *et* $y > 0$.
   (c) Montrer que la variable aléatoire X^2 suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.