Soutien du 8 janvier 2019

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$ est définie pour tout réel x. On considère désormais la fonction f définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$$
2. Etablir que f est impaire.
3. (a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer $f'(x)$, pour tout réel x, et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. (a) En utilisant la relation $t^2 \leqslant t^2+1 \leqslant t^2+2t+1$, valable pour tout t réel positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)$$
   (b) Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (c) Dresser le tableau de variation complet de f.
   (d) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
5. (a) Montrer que pour tout réel x, on a : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.
   (b) Déterminer la dérivée de la fonction h qui, à tout réel x associe $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.
   (c) En déduire l'expression explicite de $f(x)$.
6. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.
   (a) Etablir que, pour tout réel x strictement positif, on a : $x - f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)}dt$
   (b) En déduire :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{7}{6}x^3$$
   (c) Conclure que $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$.
   (d) Montrer que l'on a aussi : $f(x) \underset{0^-}{\sim} x$.