
 Soutien du 27 novembre 2018

On considère l'application $\varphi :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x - xe^{\frac{1}{x}}$. On admet $2 < e < 3$.

Partie I : Etude de la fonction φ

1. Montrer que φ est de classe C^3 sur $]0; +\infty[$, calculer, pour tout x de $]0; +\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer : $\forall x \in]0; +\infty[, \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5}e^{\frac{1}{x}}$.
2. Etudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
En déduire le sens de variation de φ' , et montrer : $\forall x \in]0; +\infty[, \varphi'(x) \geq e$.
3. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.
4. Déterminer la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
5. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3; +\infty[, \varphi(x) \geq ex$.
On note \mathcal{C} la courbe représentative de φ .
6. Montrer que \mathcal{C} admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et l'équation de la tangente en ce point.
7. Dresser le tableau de variations de φ , avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1.
Tracer l'allure de \mathcal{C} et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.
On précisera la nature de la branche infinie au voisinage de 0 et la nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$.

Partie II : Etude d'une suite et d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

8. Montrer que, pour tout n de \mathbb{N} , u_n existe et $u_n \geq 3e^n$. (On pourra utiliser les résultats de la partie I).
9. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.
10. Ecrire un programme en Scilab qui affiche et calcule le plus petit entier n tel que $u_n \geq 10^3$.
11. Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$?