ECE2 **Année 2018-2019**

Soutien du 9 octobre

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire
Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3, et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.
Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :
• Au départ, c'est à dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
• Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant n. D'après le premier des deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$.

1) Donner la loi de X_1, ainsi que l'espérance $E(X_1)$ de la variable X_1.
On admet pour la suite que la loi de X_2 est donnée par :

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{3} \quad P(X_2 = 2) = P(X_2 = 3) = P(X_2 = 4) = \frac{2}{9}$$

2) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, donner, en justifiant, l'ensemble des valeurs prises par X_n.

3) **a:** Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}\left(P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)\right)$$

b: Vérifier que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

c: Justifier que, pour tout n de $\mathbf{N}$, on a $P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1$ et en déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad P(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}$$

d: Établir alors que : $\quad \forall n \in \mathbf{N} \quad P(X_n = 1) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n.$

4) **a:** En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}\left(P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)\right)$$

b: En déduire une relation entre $P(X_{n+1} = 2)$ et $P(X_n = 2)$.

c: Montrer enfin que : $\quad \forall n \in \mathbf{N} \quad P(X_n = 2) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n.$

5) On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$P(X_{n+1} = 3) = -\frac{1}{3}P(X_n = 3) + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(X_{n+1} = 4) = -\frac{1}{3}P(X_n = 4) + \frac{1}{3}$$

En déduire sans calcul que :

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

6) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'espérance $E(X_n)$ de la variable aléatoire X_n.

Partie 2 : calcul des puissances d'une matrice A

Pour tout n de $\mathbf{N}$, on considère la matrice-ligne de $\mathscr{M}_{1,4}(\mathbf{R})$:

$$U_n = \big(P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3) \quad P(X_n = 4)\big)$$

7) **a:** Montrer (grâce à certains résultats de la partie 1) que, si l'on pose $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a : $\forall n \in \mathbf{N} \quad U_{n+1} = U_n\, A.$

b: Établir par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N} \quad U_n = U_0\, A^n.$

c: En déduire la première ligne de A^n.

8) Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres lignes de la matrice A^n, puis écrire ces trois lignes.

Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A

On considère les matrices I et J suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9) Déterminer les réels a et b tels que $A = aI + bJ$.

10) **a:** Calculer J^2 puis établir que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $J^k = 4^{k-1}J$.

b: À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire, pour tout entier n non nul, l'expression de A^n comme combinaison linéaire de I et J.

c: Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $n = 0$.

Partie 4 : informatique

11) **a:** Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il affiche les 100 premières positions autres que celle d'origine, du mobile dont le voyage est étudié dans ce problème, ainsi que le nombre n de fois où il est revenu sur le sommet numéroté 1 au cours de ses 100 premiers déplacements (on pourra utiliser la commande `sum`).

```
A=[ ....... ] /3
x=grand(100,'markov',A,1)
n=......
disp(x)
disp(n)
```

b: Après avoir exécuté cinq fois ce script, les réponses concernant le nombre de fois où le mobile est revenu sur le sommet 1 sont : $n = 23$, $n = 28$, $n = 23$, $n = 25$, $n = 26$. En quoi est-ce normal ?