Soutien du 9 octobre

Dans tout cet exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2, d'apparence identique et contenant chacune N boules indiscernables au toucher.
L'urne U_1 contient $(N-1)$ boules blanches et une boule noire.
L'urne U_2 contient N boules blanches.

I - Une première expérience aléatoire

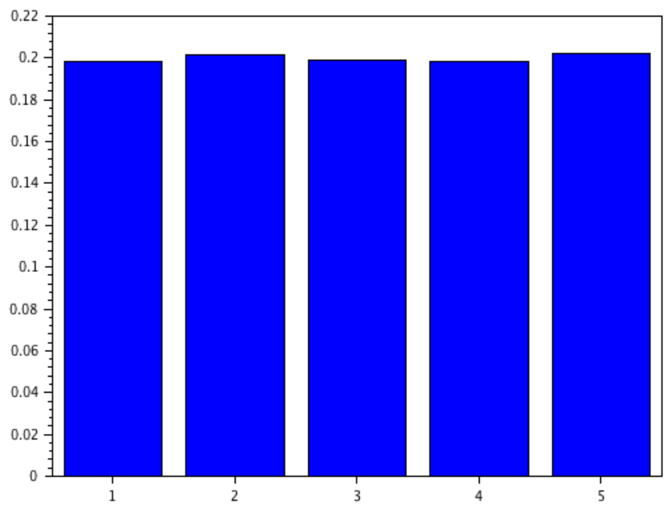
On effectue des tirages **sans remise** dans l'urne U_1, jusqu'à l'obtention de la boule noire.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire.
On notera pour tout entier naturel i non nul :

- N_i l'évènement « on tire une boule noire lors du i-ième tirage ».
- B_i l'évènement « on tire une boule blanche lors du i-ième tirage ».

1. On simule 10000 fois cette expérience aléatoire.
   Recopier et compléter le programme SCILAB suivant pour qu'il affiche l'histogramme donnant la fréquence d'apparition du rang d'obtention de la boule noire :

```
N = input(' Donner un entier naturel non nul') ;
S = zeros(1,N);
for k = 1 : 10000
        i = 1 ;
        M = N ;
        while ____________________
                i = i + 1 ;
                M = ____________________ ;
        end
        S(i) = S(i) + 1 ;
end
disp(S / 10000)
bar(S / 10000)
```

2. On exécute le programme complété ci-dessus. On entre 5 au clavier et on obtient l'histogramme suivant :



Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la loi de la variable aléatoire X ?

Pour les questions suivantes, on revient au cas général où $N \geqslant 3$.

3. En écrivant soigneusement les évènements utilisés, calculer $P(X=1)$, $P(X=2)$ et $P(X=3)$.
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
5. Préciser le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire.

II - Une deuxième expérience aléatoire

On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules **sans remise** jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie.
On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués.
On note :

- C_1 l'évènement « on choisit l'urne U_1 ».
- C_2 l'évènement « on choisit l'urne U_2 ».

1. Montrer que pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$:
$$P_{C_1}(Y=j) = \frac{1}{N}.$$
2. Calculer $P_{C_2}(Y=j)$ pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$.
(On distinguera les cas $j = N$ et $1 \leqslant j \leqslant N-1$).
3. Montrer que :
$$P(Y=j) = \begin{cases} \dfrac{1}{2N} & \text{si } j \in [\![1, N-1]\!] \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2N} & \text{si } j = N \end{cases}$$
4. Calculer l'espérance de Y.

III - Une troisième expérience aléatoire

On effectue une succession infinie de tirages **avec remise** dans l'urne U_1. On admet qu'on obtient presque-sûrement au moins une boule blanche et au moins une boule noire lors de ces tirages.
On note T la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.
On note U la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.
Par exemple, si les tirages ont donné successivement : noire, noire, noire, blanche, blanche, noire,. . . , alors $T = 4$ et $U = 1$.

1. Préciser les valeurs prises par T.
2. Montrer soigneusement que pour tout entier $k \geqslant 2$,
$$P(T=k) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}.$$
3. Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance que l'on calculera.
4. (a) Calculer $P([U=1] \cap [T=2])$.
   (b) Calculer $P([U=1] \cap [T=k])$ pour tout entier $k \geqslant 3$.
5. Soit j un entier tel que $j \geqslant 2$.
   (a) Calculer $P([U=j] \cap [T=j+1])$.
   (b) Que vaut $P([U=j] \cap [T=k])$ pour tout entier $k \geqslant 2$ tel que $k \neq j+1$?
6. Calculer $P(U=1)$ puis déterminer la loi de U.