TD Suites et matrices

On donne les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Diagonalisation de A et de B
   (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Justifier la relation $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$
   (c) Calculer la matrice $\Delta = P^{-1}BP$ et vérifier qu'elle est diagonale.
2. On se propose de calculer les matrices colonne X_n définies par les relations :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall n \in N \quad , \; X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n \; .$$

   A cet effet, on définit pour tout n élément de $\mathbb{N}$: $Y_n = P^{-1}X_n$ et on pose également $Y_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

   (a) Montrer que $Y_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $Y_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+2} = DY_{n+1} + \Delta Y_n$.
   (c) Montrer alors que pour tout entier naturel n : $\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} \\ v_{n+2} = 4v_n \\ w_{n+2} = -4w_{n+1} - 4w_n \end{cases}$
   En déduire les expressions explicites de u_n , v_n , et w_n en fonction de n.
   (d) Donner finalement la matrice X_n , en fonction de n .