# TD-Série harmonique

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, par son terme général $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1.

## Divergence de la suite

1. Calculer $v_1$ et $v_2$.
2. Étudier le sens de variation de cette suite. Quelle est alors l'alternative pour la limite de cette suite ?
3. Dans cette question, on suppose qu'il existe un réel $\ell$ tel que $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$.
   (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_{2n} - v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Donner, en fonction de $n$, le plus petit terme de cette somme ainsi que le nombre de termes de cette somme.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_{2n} - v_n \geq \frac{1}{2}$.
   (c) Aboutir à une contradiction par passage à la limite. En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

## Majoration de la vitesse de divergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. Soit $f : x \mapsto \ln(1-x) + x$.
   (a) Donner l'ensemble de définition de $f$, noté $\mathcal{D}_f$.
   (b) On admet que $f$ est dérivable sur $\mathcal{D}_f$. Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$.
   (c) Dresser le tableau de variations de $f$ puis en déduire le signe de $f$.
   (d) En conclure que pour tout $x \in [0;1[$, on a $\ln(1-x) \leq -x$.
2. Soit $k$ un entier tel que $k \geq 2$. A l'aide de la question précédente et en prenant $x = \frac{1}{k}$, en déduire que $\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$.
3. Simplifier $\sum_{k=2}^{n} (\ln(k) - \ln(k-1))$.
4. Déduire des deux questions précedentes que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leq \ln(n) + 1$.

*Un peu de culture mathématique : cette suite est appelée la série (c'est le nom des suites définies par des sommes) harmonique. On peut être plus précis et montrer que $v_n$ se comporte à l'infini presque comme $\ln(n)$, plus précisément que $\lim_{n\to+\infty} (v_n - \ln(n)) = \gamma$, où $\gamma$ est appelée constante d'Euler (du nom d'un des plus grands mathématiciens de l'Histoire) et vaut environ 0,577 (nous l'avons observé lors d'un TP Scilab). On ne sait toujours pas si ce nombre est un nombre rationnel ou pas. Depuis 2003, on sait en revanche que si c'est un nombre rationnel, sa fraction irréductible possède au minimum 242080 chiffres !*