TD-Problème 1

Dans tout cet exercice on considère les fonctions cosinus et sinus hyperbolique notées ch et sh et définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. (a) Montrer que pour tout réel x, $\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x$.

   (b) Montrer que pour tout réel x,

   $$(\mathrm{ch}(x))^2 - 1 = (\mathrm{sh}(x))^2 \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{ch}(x))^2 + (\mathrm{sh}(x))^2 = \mathrm{ch}(2x)$$

2. (a) Déterminer le domaine de définition de la fonction g définie par : $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

   (b) Résoudre l'inéquation $x + g(x) > 0$.
   En déduire que le domaine de définition de la fonction f définie par :
   $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ est $[1, +\infty[$

   (c) Montrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, $f(x) \geqslant 0$.

   On peut donc considérer l'application (que l'on note encore f) :

   $$\begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \to & [0, +\infty[\\ x & \mapsto & \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \end{array}$$

3. (a) Montrer que pour tout réel x positif, $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1$.
   On peut donc considérer l'application :

   $$g : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & [1, +\infty[\\ x & \mapsto & \mathrm{ch}(x) \end{array}$$

   (b) Montrer qu'alors pour tout $x \in [0, +\infty[$, $(f \circ g)(x) = x$.

   (c) Déterminer de même l'application $g \circ f$. Que concluez-vous ?