

---

**TD - Probabilités infinies - Longueur de séries consécutives.**


---

Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur  $A$  ou le serveur  $B$ .

On constate que le serveur  $A$  est choisi dans 70% des cas et donc que le serveur  $B$  est choisi dans 30% des cas. (Ce qui revient à dire que la probabilité pour que le serveur  $A$  soit choisi est de 0.7). Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur  $A$  est de 0.1, alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur  $B$  est de 0.05.
  - (a) Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un courrier.
  - (b) Si le courrier a subi une erreur de transmission, quelle est la probabilité pour que le serveur utilisé soit le serveur  $A$  ?
2. A partir d'un jour donné, appelé le jour 1, on note les différents serveurs utilisés par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite  $AABBBA\dots$  signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur  $A$ , les jours 3, 4 et 5 il a choisi le serveur  $B$ , et le jour 6 le serveur  $A$ . Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3 (Ce qui est également le cas de la série  $BBAAAB\dots$ )

On introduit, pour  $k \geq 1$ , les événements  $A_k$  "le serveur choisi le jour  $k$  est le serveur  $A$ " et  $B_k$  l'évènement correspondant au choix du serveur  $B$  le jour  $k$ .

On note pour  $n \geq 1$ ,  $L_n$  l'évènement "la première série est de longueur  $n$ " et  $M_n$  l'évènement analogue pour la seconde série. Ainsi, pour  $k \geq 1$ ,  $L_k$  est réalisé si, pendant les  $k$  premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et l'autre serveur le  $(k+1)$ -ième jour.

- (a) Montrer que, presque sûrement, le serveur  $A$  sera choisi et qu'il en est de même pour le serveur  $B$ .
- (b) Justifier soigneusement la formule :

$$\forall k \geq 1 \quad P(L_k) = (0.3)^k (0.7) + (0.7)^k (0.3)$$

- (c) Vérifier, tout aussi soigneusement, par le calcul que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_k) = 1$$

- (d) Justifier que la série  $\sum_{k \geq 1} kP(L_k)$  est convergente et calculer sa somme.  
On interprétera cette somme comme *la longueur moyenne* de la première série de serveurs.
- (e) Pour chaque  $k, j \in \mathbb{N}^*$ , déterminer  $P(L_k \cap M_j)$ .
- (f) En déduire les valeurs de  $P(M_j)$  pour tout  $j \geq 1$ .