

---

**TD Matrices et probabilités**


---

**PREMIERE PARTIE**

Soit  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $I$  la matrice unité de taille 3.

1. On pose  $J = M - I$ .
  - (a) Calculer  $J^2$  en fonction de  $J$
  - (b) Montrer par récurrence qu'il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels telle que pour tout entier naturel  $n$  :

$$M^n = I + u_n J$$

- (c) Exprimer alors  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .
  - (d) Pour tout entier  $n$ , on pose  $v_n = u_n + 1/3$ . Montrer que  $(v_n)$  est géométrique. En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$ .
2. Ecrire  $M^n$  pour tout entier naturel  $n$ .

**DEUXIEME PARTIE**

Les poules pondent des oeufs que l'on classe suivant 3 calibres  $A, B$  et  $C$  (petits, moyens et gros).

- Si une poule pond un oeuf de calibre  $A$ , l'oeuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre  $A, B$  ou  $C$  avec des probabilités respectives de  $1/2, 1/4$  et  $1/4$ .
- Si une poule pond un oeuf de calibre  $B$ , l'oeuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre  $A, B$  ou  $C$  avec des probabilités respectives de  $1/4, 1/2$  et  $1/4$ .
- Si une poule pond un oeuf de calibre  $C$ , l'oeuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre  $A, B$  ou  $C$  avec des probabilités respectives de  $1/4, 1/4$  et  $1/2$ .
- Pour tout entier naturel non nul, on désigne par  $a_n, b_n$  et  $c_n$  les probabilités respectives pour que le  $n$ ème oeuf pondu par une poule soit de calibre  $A, B$  ou  $C$ .

On pose alors  $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

1. (a) Calculer  $a_{n+1}, b_{n+1}$  et  $c_{n+1}$  en fonction de  $a_n, b_n$  et  $c_n$ . En déduire une matrice carrée  $U$  telle que  $X_{n+1} = U X_n$  pour tout entier  $n$ .
  - (b) Exprimer  $U$  en fonction de  $M$ . En déduire  $U^n$  en fonction de  $n$ .
2. On suppose que le premier oeuf pondu par une poule est de calibre  $C$ . Déduire des questions précédentes  $a_n, b_n$  et  $c_n$  en fonction de  $n$ , ainsi que leurs limites quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .