
TD - Lancers d'une pièce. Variables aléatoires finies.

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p un réel de $]0; 1[$ et on pose $q = 1 - p$.

On dispose d'une pièce donnant Pile avec la probabilité p et Face avec la probabilité q .

On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

- Soit si l'on a obtenu Pile .
- Soit si l'on a obtenu n fois Face.

Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (respectivement F_k l'événement « on obtient Pile (respectivement Face) au k^e lancer »).

On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de Pile obtenus et enfin Y_n le nombre de Face obtenus.

1. Loi de T_n .

(a) Pour tout k de $\llbracket 1; n - 1 \rrbracket$, déterminer, en distinguant le cas $k = 1$, la probabilité $P(T_n = k)$

(b) Déterminer $P(T_n = n)$.

(c) Vérifier que $\sum_{k=1}^n P(T_n = k) = 1$.

(d) Vérifier que $E(T_n) = \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

2. Loi de X_n .

(a) Donner la loi de X_n .

(b) Vérifier que $E(X_n) = 1 - q^n$.

3. Loi de Y_n .

(a) Déterminer, pour tout k de $\llbracket 0; n - 1 \rrbracket$, la probabilité $P(Y_n = k)$.

(b) Déterminer $P(Y_n = n)$.

(c) Écrire une égalité liant les variables aléatoires T_n , X_n et Y_n , puis en déduire $E(Y_n)$.

4. Simulation informatique.

Compléter les trois instructions manquantes pour que le programme suivant simule l'expérience aléatoire décrite ci-dessus et pour qu'il affiche, dans cet ordre, les valeurs prises par les variables aléatoires T_n , X_n et Y_n .

```

function [t,x,y]=experience(p,n)
t=0
x=0
y=0
while (t<n & x==0)
    .....
    if rand()>p then .....
        else .....
    end
end
endfunction

```