TD : Exponentielle de matrice

Dans l'exercice, on étudie l'exponentielle d'une matrice pour des matrices carrées de dimensions 2 et 3.

Partie I : Exponentielle d'une matrice carrée de dimension 3

Soient A et P les matrice définies par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. On pose $T = P\,A\,P^{-1}$.
   (a) Vérifier que $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   (b) Calculer T^2, T^3, puis T^n pour out entier naturel $n \geqslant 3$.
3. En déduire que pour tout $n \geqslant 3$, $\quad A^n = 0_3$, où 0_3 désigne la matrice nulle d'ordre 3.
4. Pour tout réel t, on définit la matrice $E(t)$ par $E(t) = I_3 + tA + \dfrac{t^2}{2}A^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.
   (a) Montrer que $\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2, \quad E(t)\,E(t') = E(t+t')$.
   (b) Pour tout t réel, calculer $E(t)\,E(-t)$. En déduire que la matrice $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de $I_3,\ A,\ A^2,\ t$.
   (c) Pour tout t réel et tout entier naturel n, déterminer $[E(t)]^n$ en fonction de $I_3,\ A,\ A^2,\ t$ et n.

Partie II : Exponentielle d'une matrice carrée de dimension 2

Soient B et D les matrices définies par : $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Pour tout entier naturel n non nul, et pour tout réel t, on définit la matrice $E_n(t)$ par :

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} B^k \text{ que l'on note } E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & c_n(t) \\ b_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$$

1. Expliciter la matrice $B - \lambda I_2$, avec λ un nombre réel.
   Déterminer les réels λ pour lesquels la matrice $B - \lambda I_2$ n'est pas inversible.
2. Résoudre les systèmes linéaires $BX = X$ et $BX = 2X$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
3. On pose $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer deux réels a et b tels que $Q^2 = aQ + bI_2$.
   (b) Montrer que Q est inversible et que $Q^{-1}BQ = D$.
4. Pour tout entier naturel n, montrer que $B^k = \begin{pmatrix} 2 - 2^k & 1 - 2^k \\ 2^{k+1} - 2 & 2^{k+1} - 1 \end{pmatrix}$.
5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2t^k - (2t)^k}{k!}$.
6. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} a_n(t)$