

---

**TD-Binôme de Newton et matrices**

---

**Exercice 1 :**

But : calculer les puissances de la somme d'une matrice nilpotente et d'une homothétie.

1. Soit  $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $N = T - \text{Id}_3$  (on a donc  $T = \text{Id}_3 + N$ ).

(a) Calculer  $N^k$  pour tout entier naturel  $k$ .

(b) En déduire  $T^k$  à l'aide de la formule du binôme de Newton, dont on justifiera l'emploi.

2. Reprendre la méthode précédente pour calculer  $U^k$  pour tout entier naturel  $k$ , avec  $U = 2\text{Id}_3 + N$ .

3. Reprendre la méthode précédente pour calculer  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$  pour tout entier naturel  $n$ .

**Exercice 2 :**

Soit  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Justifier que  $B = 2I_3 + N$  où  $N$  est une matrice vérifiant  $N^3 = 0_3$ , la matrice carrée nulle de dimension 3.

2. En déduire, l'expression de  $B^n$  pour  $n$  entier naturel supérieur ou égal à 2. Vérifier que cette formule est également valable pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .