

Dichotomie

On considère l'application φ définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}$$

I. Résolution de l'équation $\varphi(x) = 1$.

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.
Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Interpréter graphiquement cette limite.
3. Prouver que φ est strictement monotone sur \mathbb{R}_+^* .
4. Dresser le tableau de variation de φ et y faire apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.
5. On rappelle que $\ln(2) \approx 0,7$ et $\ln(3) \approx 1,1$.
Montrer que l'équation $\varphi(x) = 1$ possède une unique solution notée α et que :

$$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$$

6. Proposer un programme en Scilab permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2} .