Scilab - TP 9

Approximation de la limite de suites adjacentes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes telles que :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Alors, d'après le theorème des suites adjacentes, elles convergent vers une limite commune l et on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant l \leqslant v_n$.
Ainsi, en calculant pour n assez grand u_n et v_n, on obtient un encadrement de l avec une bonne précision.

Exemple 1

Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

On a déjà démontré que ces deux suites étaient adjacentes et convergent donc vers une même limite. Le procédé suivant permet de calculer une approximation de l à ε près, ε étant un réel strictement positif entré par l'utilisateur :

```
eps=input('Donner une valeur de epsilon')
u=1
v=2
n=1
while abs (v-u) > eps do
    n=n+1
    u=u+1
    v=u+1/n
end
disp(v,u)
```

Testez ce programme pour différentes valeurs de ε !.

Remarque 1

1. On peut démontrer que (u_n) et (v_n) convergent vers $l = \dfrac{\pi^2}{6}$.
2. Pour $\varepsilon = 10^{-3}$, Scilab donne le résultat immédiatement. Par contre, il faut presque 30 secondes pour obtenir le résultat pour $\varepsilon = 10^{-6}$. Cela s'explique par la vitesse de convergence très lente de (u_n) et (v_n). Il faut en effet 1000 itérations pour obtenir l avec une précision de 10^{-3} et 1000000 itérations pour obtenir l avec une précision 10^{-6}.

Exercice 1

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(4k+1)(4k+3)} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{4n-1}$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers la même limite.
2. Construire une procédure qui, étant donné un entier naturel n, calcule u_n et v_n.
3. Construire une procédure qui, étant donné $\varepsilon > 0$, permet de calculer une approximation de la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à ε près.

Exercice 2

On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

. On admet que ces deux suites sont adjacentes.

1. Construire une procédure qui, étant donné un entier naturel n, calcule a_n et b_n.
2. Construire une procédure qui, étant donné $\varepsilon > 0$, permet de calculer une approximation de la limite commune des deux suites à ε près.

Exercice 3

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies par :

$$v_0 = 1,\ w_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3}w_n \quad , \quad w_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + \frac{2}{3}w_n$$

1. Construire une procédure qui, étant donné un entier naturel n, calcule v_n et w_n.
2. On pose $t_n = v_n - w_n$.
   (a) Montrer que (t_n) est une suite géométrique dont on précisera sa raison.
   (b) Exprimer t_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant w_n$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - w_n)$.
3. (a) Montrer que (v_n) est croissante et (w_n) est décroissante.
   (b) Montrer que les suites (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite notée l.
4. (a) Construire une procédure qui, étant donné $\varepsilon > 0$, permet de calculer une approximation de la limite des suites (v_n) et (w_n) à ε près.
   (b) Vers quelle limite semble converger (v_n) et (w_n) ?
5. On pose $s_n = v_n + w_n$.
   (a) Montrer que le suite s_n est constante.
   (b) En déduire la valeur de l.