Scilab - TP 4

Polynômes et matrices

I - Polynômes

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, c'est à dire un polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On peut écrire :

$$P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$$

Le polynôme P est **entièrement déterminé** par la suite $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ de ses coefficients. Ainsi, on code le polynôme P par le vecteur-ligne `P` formé de la suite de ses coefficients (listé par ordre croissant des puissances correspondantes) :

$$P = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$$

Remarque 1

Cette façon de représenter les choses, plutôt intuitive, nécessite une certaine vigilance : en effet, $P(k)$ renvoie le coefficient a_{k-1}.
Quel est le polynôme représenté par `P=[-1, 0, 0, 3, 2]` ?
Comment représenter le polynôme $Q = 2x^4 - 3x^2 + 1$?

Exercice 1

1. Quelle fonction de `Scilab` permet d'obtenir le degré d'un polynôme?
2. Recopier dans `SciNotes` et compléter la fonction `y=evalpoly(P,x)`, prenant pour arguments un polynôme `P` et un réel `x` et qui renvoie la valeur du polynôme `P` évalué en `x`.

```
function y=evalpoly(P,x)
    y=P(1);
    for k=2:..........................
        y=..........................
    end
endfunction
```

Exercice 2 (*Polynôme dérivé*)

Ecrire une fonction `derivepoly()` prenant pour argument un polynôme P et renvoyant le polynôme dérivé P'.

Exercice 3 (*Polynômes de Legendre*)

1. Soit $n \geqslant 1$. Quel est le degré du polynôme $P_n(X) = (X^2 - 1)^n$?
   Préciser quels sont les coefficients de ses monômes.
   En déduire une façon d'implémenter le polynôme P_n sous `SciLab`.
2. On définit le n-ième polynôme L_n de Legendre comme dérivée n-ième du polynôme P_n (ce que l'on note par $L_n = P_n^{(n)}$.
   (a) Quel est le degré de L_n ?
   (b) A l'aide de la question 1) et de l'exerice 2, écrire une fonction `Legendre()` prenant pour argument un entier n et renvoyant le polynôme de Legendre L_n.
   (c) Préciser les 4 premiers polynômes de Legendre. Les représenter sur un même graphique sur l'intervalle [-1;1].

II - Matrices

Si n et p sont deux entiers supérieurs ou égaux à 1 et que $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice :

$$\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{cccccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & & j\text{-ème colonne} & & \phantom{a_{1p}} \\ & & & \downarrow & & \end{array} \\
\begin{array}{r} \\ \\ \\ i\text{-ème ligne} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np}
\end{pmatrix}
\end{array}$$

on peut définir la matrice A dans `SciLab` par la syntaxe

$$A = [a_{1,1}, \dots, a_{1,p}; a_{2,1}, \dots, a_{2,p}; \dots; a_{n,1}, \dots, a_{n,p}$$

Les coefficients d'une même ligne sont séparés par des virgules et on indique le changement de ligne par un point-virgule.

Si `A` est une matrice déjà définie :

- l'instruction `A(i,j)` renvoie le coefficient de la i-ème ligne et j-ième colonne.
- l'instruction `size(A` renvoie le vecteur ligne `[L,C]` où `L` est le nombre de lignes de `A` et `C` le nombre de colonnes.
  L'instruction `length(A)` renvoie quant à elle le nombre $L \times C$ de ses coefficients.

Les opération + ou `*` permettent de faire des opérations sur les matrices (multiplication par un réel, additions, et multiplications de deux matrices lorsque cela a un sens).

Si `A` est une matrice carrée déjà définie et si `k` est un entier, l'instruction A^k permet de calculer les puissances de `A`. Si la matrice est inversible, on peut étendre l'instruction à `k` entier relatif.

L'instruction `eye(n,n)` renvoie la matrice identité de taille n
L'instruction `zeros(n,p)` construit une matrice ne contenant que des zéros.
`ones(n,p)` est une matrice ne contenant que des 1.

Enfin, `A'` renvoie la transposée de `A`.

Exercice 4

1. Définir dans la console `SciLab` les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

2. Que renvoient les instructions suivantes :
   `A+B`, `A*B`, `A+C`, `A'*C`, `B`^{2}, B^{-1}, C^{-1}, $C * C^{-1} - \ eye\ (3;3)$?
3. Que renvoie `A(3)` ? `A(5)` ?
4. Taper l'instruction `A(3,3)=1`, puis `A`. Que s'est-il passé ?
5. Même question si on tape `A(4,5)=-2`.

Exercice 5

Ecrire un programme qui demande à l'utilisateur de rentrer un entier strictement positif n et affiche la matrice :

$$\left((-1)^{i+j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^{n+1} \\ -1 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (-1)^{n+1} & (-1)^{n+2} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Définir les matrices précédentes dans la console `SciLab`.
2. Calculer $A^2 + A - 2I_3$.
3. Introduire la matrice $B = \frac{1}{2}(A + I_3)$. Que se passe-t-il?
4. Vérifier que P est inversible et calculer $Q = P^{-1}$.
5. Vérifier que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Exercice 7 (*Polynôme de matrice*)

Ecrire une fonction `polymat()` prenant comme argument un polynôme `P` (codé sous forme de vecteur-ligne) et une matrice `A` qui renverra la matrice `P(A)`.

L'instruction `inv(A)` renvoie également, si la matrice est inversible, l'inverse de A.
L'instruction `rank(A)` renvoie le **rang** de la matrice. Si la matrice est carrée et que son rang est égal à son nombre de lignes (ou de colonnes), alors la matrice est inversible.

Exercice 8

Ecrire un programme demandant à l'utilisateur de rentrer une matrice carrée, vérifiant que celle-ci est bien carrée puis affichant un message de réponse concernant l'inversibilité de la matrice. Si la matrice est inversible, le programme affichera aussi l'inverse, sinon elle précisera le rang.

Exercice 9 (*Résolution de système*)

On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 3x - 2y + t = 3 \\ -5x + 3y - 2z + 2t = 3 \\ x - y + z - t = -2 \\ 4x - 10y + 7z - 4t = -11 \end{cases}$$

1. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix}$. Introduire une matrice A telle que $AX = B$.
2. Montrer que le système est de cramer si et seulement si A est inversible. Comment obtient-on alors X?
3. Utiliser `SciLab` pour résoudre le système.

Exercice 10

1. Taper puis observer ce que font les instructions `diag(2*ones(7,1))` puis `diag(-3*diag(4,1),1)`.
2. En déduire une suite de commandes permettant de créer la matrice A de taille 8×8 définie par :

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Ecrire une fonction prenant en argument un entier n, trois réels a,b,c et renvoyant la matrice carrée de taille n ci-dessous.

$$A=\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \ddots & & \vdots \\ 0 & c & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c & a \end{pmatrix}$$

Si `A` est une matrice carrée de taille $n\times p$ déjà définie, la commande `A(i,:)` renvoie la i-ème ligne de `A`, alors que `A(:,j)` renvoie la j-ième colonne.

Exercice 11 (*Matrices stochastiques*)

On dit qu'une matrice est *stochastique* si tous ses coefficients sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.
Ecrire un programme demandant à l'utilisateur de rentrer une matrice et affichant si la matrice est stochastique ou non.

Exercice 12 (*Matrice de Van der Monde et interpolation polynomiale*)

Soient $x_0, x_1, \dots, x_n$ des réels. On appelle matrice de Van der Monde associée à (x_i), la matrice

$$V(x_0,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 & \dots & {x_0}^n \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 & \dots & {x_1}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \dots & {x_n}^n \end{pmatrix}$$

1. Ecrire une fonction `vandermonde()` prenant en argument un vecteur-ligne $[x_0, x_1, \dots, x_n]$ et renvoyant la matrice de Van der monde associée.
2. Application : on cherche à résoudre *un problème d'interpolation polynomiale*. C'est à dire que, étant donnés $x_0, x_1, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts et $y_0, y_1, \dots, y_n$ d'autres réels, on veut trouver un polynôme P de degré $n+1$ tel que :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \qquad P(x_i) = y_i$$

   (a) Notant $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ les coefficients du polynôme P, montrer que P est solution du problème d'interpolation est équivalent à

$$V(x_0, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

   (b) En déduire l'écriture d'une fonction `interpolation()` prenant en arguments deux vecteurs lignes $x = [x_0, x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_0, y_1, \dots, y_n]$ et renvoyant le polynôme solution du problème d'interpolation correspondant.