Voie E

Dans tout l'exercice, X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que les deux variables X et Y sont **échangeables** si :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P([X=i] \cap [Y=j]) = P([X=j] \cap [Y=i])$$

Résultats préliminaires

1. On suppose que X et Y sont deux variables indépendantes et de même loi.
   Montrer que X et Y sont échangeables.
2. On suppose que X et Y sont échangeables. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad P(X=i) = P(Y=i)$$

Étude d'un exemple

Soient n, b et c trois entiers strictement positifs.
Une urne contient initialement n boules noires et b boules blanches. On effectue l'expérience suivante, en distinguant trois variantes.

- On pioche une boule dans l'urne.
  On définit X la variable aléatoire qui vaut 1 si cette boule est noire et 2 si elle est blanche.
- On replace la boule dans l'urne et :
  - ⋆ Variante 1 : on ajoute dans l'urne c boules de la même couleur que la boule qui vient d'être piochée.
  - ⋆ Variante 2 : on ajoute dans l'urne c boules de la couleur opposée à celle de la boule qui vient d'être piochée.
  - ⋆ Variante 3 : on n'ajoute pas de boule supplémentaire dans l'urne.
- On pioche à nouveau une boule dans l'urne.
  On définit Y la variable aléatoire qui vaut 1 si cette seconde boule piochée est noire et 2 si elle est blanche.

3. (a) Compléter la fonction Scilab suivante, qui simule le tirage d'une boule dans une urne contenant b boules blanches et n boules noires et qui retourne 1 si la boule tirée est noire, et 2 si la boule tirée est blanche.

```
function res = tirage( b , n )
        r = rand()
        if ........... then
                res = 2
        else
                res = 1
        end
endfunction
```

   (b) Compléter la fonction suivante, qui effectue l'expérience étudiée avec une urne contenant initialement b boules blanches, n boules noires et qui ajoute éventuellement c boules aprés le premier tirage, selon le choix de la variante dont le numéro est `variante`.
   Les paramètres de sortie sont :
   — `x` : une simulation de la variable aléatoire X
   — `y` : une simulation de la variable aléatoire Y

```
function [ x , y ] = experience ( b , n , c , variante )
        x = tirage ( b , n )
        if variante == 1 then
                if x == 1 then
                        ...........
                else
                        ...........
                end
        else if variante == 2 then
                ...........
                ...........
                ...........
                ...........
                ...........
        end
        y = tirage ( b , n )
endfunction
```

(c) Compléter la fonction suivante, qui simule l'expérience N fois (avec $N \in \mathbb{N}^*$), et qui estime la loi de X, la loi de Y et la loi du couple (X, Y).
Les paramètres de sortie sont :
— `loiX` : un tableau unidimensionnel à deux éléments qui estime [P(X=1), P(X=2)]
— `loiY` : un tableau unidimensionnel à deux éléments qui estime [P(Y=1), P(Y=2)]
— `loiXY` : un tableau bidimensionnel à deux lignes et deux colonnes qui estime :

$$\begin{bmatrix} P([X=1] \cap [Y=1]) & P([X=1] \cap [Y=2]) \\ P([X=2] \cap [Y=2]) & P([X=1] \cap [Y=2]) \end{bmatrix}$$

```
function [ loiX, loiY , loiXY ] = estimation(b,n,c,variante,N)
        loiX = [ 0 , 0 ]
        loiY = [ 0 , 0 ]
        loiXY = [ 0 , 0 ; 0 , 0 ]
        for k = 1 : N
                [x , y] = experience( b , n , c , variante )
                loiX(x) = loiX(x) + 1
                ...........
                ...........
        end
        loiX = loiX / N
        loiY = loiY / N
        loiXY = loiXY / N
endfunction
```

(d) On exécute notre fonction précédente avec $b = 1$, $n = 2$, $c = 1$, $N = 10000$ et dans chacune des variantes. On obtient :

```
-->[loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,1,10000)
 LoiXY =
        0.49837 0.16785
        0.16697 0.16681
 LoiY =
        0.66534 0.33466
 LoiX =
        0.66622 0.33378

-->[loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,2,10000)
 LoiXY =
        0.33258 0.33286
        0.25031 0.08425
 LoiY =
        0.58289 0.41711
 LoiX =
        0.66544 0.33456

-->[loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,3,10000)
 LoiXY =
        0.44466 0.22098
        0.22312 0.11124
 LoiY =
        0.66778 0.33222
 LoiX =
        0.66564 0.33436
```

En étudiant ces résultats, émettre des conjectures quant à l'indépendance et l'échangeabilité de X et Y dans chacune des variantes.
On donne les valeurs numériques approchées suivantes :

$$\begin{gathered}
0.33 \times 0.33 \simeq 0.11 \\
0.33 \times 0.41 \simeq 0.14 \\
0.33 \times 0.58 \simeq 0.19 \\
0.33 \times 0.66 \simeq 0.22 \\
0.41 \times 0.66 \simeq 0.27 \\
0.58 \times 0.66 \simeq 0.38 \\
0.66 \times 0.66 \simeq 0.44
\end{gathered}$$

4. On se place dans cette question dans le cadre de la variante 1.
   (a) Donner la loi de X.
   (b) Déterminer la loi du couple (X, Y).
   (c) Déterminer la loi de Y.
   (d) Montrer que X et Y sont échangeables mais ne sont pas indépendantes.