Fiche d'exercice : RECURRENCE-SUITES-SOMMES

Exercice 1 : $(*)$

Etudier le sens de variation des suites suivantes :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \dfrac{3n+2}{n+1}$
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $v_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$
3. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $w_n = 3^n - 2^{n+1}$
4. $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.

Exercice 2 : $(*)$

Déterminer en fonction de n l'expression de u_n dans les cas suivant :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et par : pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}u_n$.
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{1+(u_n)^2}$.
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2^n$

Exercice 3 : $(*)$

On considère la suite définie par son premier terme $u_0 = 0$ et par la relation :

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{3+2u_n}{u_n+4}$$

1. Montrer que pour tout entier n, $0 \leq u_n \leq 1$.
2. Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 4 : $(*)$

1. Écrire les nombres suivants sans le symbole Σ :
   a) $\displaystyle\sum_{i=2}^{n+1} \ln(i-1)$ b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2023} (-1)^i$
2. Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole Σ :

   a) $\ln(2)+\ln(3)+\ln(4)+\cdots+\ln(42)$ b) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}$

   c) $\frac{1}{1+1!}+\frac{4}{1+2!}+\frac{9}{1+3!}+\cdots+\frac{100^2}{1+100!}$ d) $1-2+3-4+\cdots+103$ e) $2+4+6+\cdots+248$

   f) $1+3+5+\cdots+249$

3. Écrire la somme suivante en faisant en sorte que la première valeur de l'indice soit 0 :
   a) $\displaystyle\sum_{i=10}^{20} i$ b) $\displaystyle\sum_{k=-4}^{180} \frac{k}{k+5}$ c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i$.
4. Changer d'indice dans la somme suivante pour que le terme général soit plus simple :

   a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{(i+1)^2+3}{1+\sqrt{i+1}}$ b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2} \frac{x^{k-3}}{(k-3)!}$ c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} (i-1)2^i + 3^{i-1}$

Exercice 5 : $(*)$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ \ u_{n+1} = 1 + (u_n)^2$$

1. Montrer que pour tout entier n, $u_n \geq 1$.
2. Vérifier que pour tout entier n, $u_{n+2} - u_{n+1} = (u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n)$.
3. En déduire que la suite u est croissante.

Exercice 6 : $(*)$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kk! = (n+1)! - 1$

Exercice 7 : $(**)$

Soit a un réel différend de 0 et différent de 1. Soit de plus $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a^k} = \frac{a^{n+1} - (n+1)a + n}{(a-1)^2 a^n}$$

Exercice 8 : $(***)$

1. **Préliminaires**
   Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} k^3 = \left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^3$. On propose 3 méthodes de calcul de S_n
   (a) **Première méthode**
      i. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Développer $(2k+1)^3$.
      ii. En déduire alors que $S_n = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)$.
   (b) **Deuxième méthode**
      On introduit $T_n = \sum_{k=0}^{n} (2k)^3$ et $U_n = \sum_{k=0}^{2n+1} k^3$.
      i) Comparer $S_n + T_n$ et U_n.
      ii) Calculer T_n et U_n.
      iii) En déduire alors que $S_n = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)$.
   (c) **Troisième méthode**
      Montrer par récurrence que $S_n = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)$.

Exercice 9 : $(**)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(2k^2 - 1) = \frac{n(n+1)(n^2 + n - 1)}{2}$.
2. Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels. Montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} e^{x_k} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$.
3. Des questions 1) et 2), en déduire la valeur du produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{5} e^{k(2k^2-1)}$

Exercice 10 : $(*)$

Dans les cas suivants, reconnaître une suite remarquable puis déterminer l'expression de u_n en fonction de n :

1. $u_0 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - 1$;
2. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$;
3. $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = \sqrt{2}u_n$;
4. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - 1$;
5. $u_1 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 2$;
6. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 1$.
7. $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 10u_{n+1} - 25u_n$.
8. $u_0 = \frac{5}{2}, u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2}u_{n+2} = -\frac{3}{2}u_{n+1} + 2u_n$.

Exercice 11 : $(**)$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \geqslant 2$ et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que u_n existe bien et que $u_n \geqslant 2$.
2. Que se passe-t-il si $u_0 = 2$?
3. On suppose ici $u_0 > 2$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_n > 2$.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose alors $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$.
      i. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique et préciser sa raison.
      ii. En déduire alors l'expression de v_n en fonction de n.
      iii. En déduire finalement l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 12 : $(**)$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par : $u_0 \geqslant 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que u_n existe bien et que $u_n \geqslant 1$.
2. Que se passe-t-il si $u_0 = 2$?
3. On suppose ici $u_0 \neq 2$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_n \neq 2$.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose alors $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 2}$.
      i. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et préciser sa raison.
      ii. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
      iii. En déduire finalement l'expression de u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

Exercice 13 : $(*)$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite définie par : $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} = 5u_n^3$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose alors $v_n = \ln(u_n)$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique.
   (b) En déduire alors l'expression de v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) En déduire finalement l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 14 : $(**)$

Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ la suite définie par : $u_2 = 1$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{2}n + 2$$

1. Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. On pose $v_n = u_n - 2n$
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est géométrique. Déterminer son premier terme et sa raison.
   (b) Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Donner l'expression de v_n en fonction de n.
2. Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
3. Etudier la nature de la suite (u_n).
4. Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$ en fonction de n.

Exercice 15 : $(***)$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les trois suites définies par : $u_0 = 6,\ v_0 = -20, w_0 = -9$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n - \frac{4}{3}w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2w_n \\ w_{n+1} = -3u_n \end{cases}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_{n+3} = 2u_{n+2} + 5u_{n+1} - 6u_n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_n = \dfrac{10}{3} - \dfrac{11}{15}(-2)^{n+1} + \dfrac{2}{5}3^{n+1}$.
3. En déduire alors les expressions de v_n et w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16 : $(**)$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = e, u_1 = e^{-6}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = (u_{n+1}u_n^3)^{\frac{1}{4}}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que u_n existe bien et est strictement positif.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'on peut poser $v_n = \ln u_n$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+2} = \frac{1}{4}v_{n+1} + \frac{3}{4}v_n$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer v_n en fonction de n.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. De la question 2) c), déduire l'expression de u_n en fonction de n.