Fiche d'exercice : GENERALITES SUR LES FONCTIONS

Exercice 1 : $(*)$

Soit f l'application définie pour tout réel x différent de 1 par, $f(x) = \frac{1}{1-x}$.
Déterminer l'ensemble des image de $]1, +\infty[$ par f.

Exercice 2 : $(*)$

Soit f l'application définie, pour tout réel x différent de -3, par $f(x) = \dfrac{x+4}{x+3}$.
Déterminer de quel intervalle I, l'intervalle $]1, +\infty[$ est l'image par f.

Exercice 3 : $(*)$

Soit f l'application définie pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, par : $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.
Déterminer $f \circ f$ et en déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ vers $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

Exercice 4 : $(*)$

Rechercher le domaine de définition de la fonction numérique f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$
2. $f(x) = \dfrac{\ln(1 - x^2)}{x}$
3. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$
6. $f(x) = \sqrt{e^{3x-5} - 1}$
7. $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$

Exercice 5 : $(*)$

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.
Déterminer l'ensemble image par f des intervalles suivants :

1. $I =]0; 1]$
2. $I =]0; 2[$
3. $I = [-1, 1[$

Exercice 6 : $(*)$

Les fonctions suivantes sont-elles bornées sur I ? Y ont-elles un maximum ou un minimum ?

1. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ sur :
   a. $I = [1; 2]$ *b.* $I =]0; 1]$ *c.* $I =]0; 2[$ *d.* $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$ sur :
   a. $I = [0; \frac{1}{2}[$ *b.* $I = [-1; 0]$ *c.* $I = [-1; \frac{1}{2}[$ *d.* $I =]\frac{1}{2}; +\infty[$

Exercice 7 : (**)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 + 2x - 1)^2 - (x^2 + x + 2)^2$$

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
2. f est-elle paire ou impaire ?
3. f est-elle injective ?

Exercice 8 : (**)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

1. En discutant suivant la valeur de y, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = y$.
2. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
3. On note $I = [-1, 1]$. Montrer que f induit une application, notée $f_{|I}$ de $[-1, 1]$ dans lui même.
   $f_{|I}$ est-elle bijective ?

Exercice 9 : (**)

Dans les cas suivants, montrer que l'application f est bijective et déterminer sa bijection réciproque :

1. $f : \begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \to &]1, +\infty[\\ x & \mapsto & \frac{x}{x-1} \end{array}$
2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]0, 2[\\ x & \mapsto & \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1 \end{array}$
3. $f : \begin{array}{ccc}]-2, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 + \ln(2 + x) \end{array}$

Exercice 10 : $(***)$

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose, dans cette question, que f est paire. Montrer que f n'est pas bijective.
2. On suppose, dans cette question, que f est une bijection impaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que sa bijection réciproque est elle-même impaire.

Exercice 11 : $(***)$

Considérons la suite de fonctions $f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x$
- pour tout entier naturel n, $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+2}(x) = 2xf_{n+1}(x) - f_n(x)$.

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(-x) = (-1)^n f_n(x)$
2. En déduire que, quel que soit l'entier naturel n, la fonction f_n a la même parité que n.

Exercice 12 : $* * *$

Soit a un réel strictement positif. On note P_a la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $P_a(x) = x^3 + ax - 1$.

1. Montrer que cette équation admet une unique solution, que l'on notera u_a.

   On considère à présent la fonction u définie sur $\mathbb{R}_+$ qui à tout réel a associe u_a (tel que défini dans cette question).

2. En comparant $P_a(u_a))$ et $P_a(0)$, montrer que : $\forall a \geqslant, u_a > 0$.
3. (a) Montrer que, quels que soient les réels positifs a et b, $P_a(u_b) = (a - b)u_b$.
   (b) En déduire le sens de variation de la fonction u.