Fiche d'exercice : FONCTIONS USUELLES

Exercice 1 : $(*)$

Démontrer que $\sqrt{4+3\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{4}} + 2^{\frac{3}{4}}$

Exercice 2 : $(*)$

Comparer : $\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$; $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Exercice 3 : $(*)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\dfrac{3.9^{n+1}6^n}{3^{2n+1}2^{n-1}}$ 2. $\dfrac{(-1)^n\sqrt{15^{n-1}.3^{n+1}}}{\sqrt{5}.3^{n/2}(-5)^{n/2}}$

Exercice 4 : $(*)$

Résoudre : 1. $\sqrt{5x+6} \geqslant x+2$ 2. $\sqrt{2-x}+\sqrt{3+x} \geqslant 1$

Exercice 5 : $(*)$

Résoudre :
1. $4^x - 3.2^x - 10 \geqslant 0$ 2. $9^x - 3^x - 2 = 0$ 3. $(x^2\sqrt{x})^2 = 256$ 4. $x^{(x^x)} = (x^x)^x$

Exercice 6 : $(**)$

Résoudre les équations :

1. $|x^2-3x-4|+|x-1| = 5$
2. $|x-2|+|x+3| \leqslant 6$
3. $|\ln(x)-1|+|\ln(x)+1| = 2$

Exercice 7 : $(*)$

Soit $x \in]0,+\infty[$. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\dfrac{1}{6}\ln(250)+7\ln(\sqrt{2})$ 2. $\exp(-2\ln(2))$ 3. $\ln(e^{x^2+1}) - e^{2\ln(x)} + \ln(e)$

4. $\ln\left(\dfrac{xe^x}{2}\right) - x$ 5. $2\ln(x^3)+\ln\left(\frac{1}{x^3}\right)$

Exercice 8 : $(**)$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
1. $e^{3x+1} = e^{1-5x}$ 2. $e^x - 5 + \dfrac{6}{e^x} = 0$ 3. $e^{3x+1}+e^{2x+1} = 6e^{x+1}$

4. $\ln(2x-5) = 1$ 5. $\ln(1-\ln(x)) = 1$ 6. $\ln\left(\frac{x+3}{4}\right) = \frac{1}{2}(\ln(x)+\ln(3))$

Exercice 9 : $(**)$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $3e^x + 4 > 6$
2. $-3(x-2) > 10$
3. $\frac{3}{4} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-3} < 0$
4. $\ln(x+2) \leqslant 3$
5. $\ln(x^2 + x + \frac{1}{2}) > 0$
6. $\sqrt{x-2} > 4$
7. $x^2 \geqslant 25$
8. $x^2 \leqslant 16$
9. $\sqrt{x^2-1} \leqslant 10$

Exercice 10 : $(*)$

Démontrer que pour tout réel x, $\ln(e^x+1) = x + \ln(1+e^{-x})$.

Exercice 11 : $(**)$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Montrer que pour tout réel x, $f(2x) = \dfrac{2f(x)}{[f(x)]^2+1}$

Exercice 12 : $(**)$

Montrer que l'application f est bijective et déterminer sa bijection réciproque :

$$f : \begin{array}{ccc}]-2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1+\ln(2+x) \end{array}$$

Exercice 13 : $(*)$

Soient f et g les applications définies, pour tout réel x, par $f(x) = \ln(1+e^x)$ et $g(x) = -x$.
Déterminer $f \circ g$ puis vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - (f \circ g)(x) = x$.

Exercice 14 : $(*)$

On pose $f(x) = x - \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$
Déterminer le domaine de définition de f puis étudier la parité de f

Exercice 15 : $(**)$

Soit th la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{th}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. Montrer que $\mathrm{th}(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.
2. Résoudre l'équation $\mathrm{th}(x) = y$ en fonction des valeurs de y.
3. En déduire que th est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un ensemble à préciser.

Exercice 16 : $(*)$

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x + 2 - 2\ln(e^x+1)$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est paire.

Exercice 17 : (∗∗)

Soit la fonction suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{lllr} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} & \\ x & \longmapsto & |x+4| & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \longmapsto & -2x+1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ x & \longmapsto & x^2-2x-3 & \text{si } 3 \leqslant x \end{array} \right.$$

1. Donner le tableau des variations de f et tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.
2. Déterminer les antécédents de 0, de 12, de -1, par la fonction f.

Exercice 18 : ∗∗

On considère les fonctions numériques f et g définies par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

1. Démontrer que le domaine de définition de f est $]-1,1[$.
   On peut donc à présent considérer l'application, que l'on note encore
   $$\begin{array}{rcc} f :]-1;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{array}$$
2. Montrer que f est impaire.
3. (a) Démontrer que g est définie sur $\mathbb{R}$. Etudier sa parité.
   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, -1 < g(x) < 1$.
   On peut donc considérer l'application, que l'on note encore
   $$\begin{array}{rcc} g : \mathbb{R} & \to &]-1;1[\\ x & \mapsto & \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \end{array}$$
4. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x)$.
5. (a) Montrer que pour tout réel x, $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$
   (b) En déduire pour tout $x \in]-1;1[$, $(g \circ f)(x)$.
6. Que pouvez-vous en déduire des applications f et g.