Exercices de révision - avril 2019

Exercice 1 : Monotonie d'une suite

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : pour tout entier naturel n, $v_n = -(n+2)(n-10)$.
Etudier la monotonie de cette suite.

Exercice 2 : Récurrence

Montrer que pour tout entier naturel n, $2^n \geqslant n+1$.

Exercice 3 : Identité remarquable

Développer $(2-2k)^3$.

Exercice 4 : Utilisation de sommes usuelles

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{2n+1} k^2$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)^2$
3. Calculer $u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{3^{i-1}}{2^{i+1}}$

Exercice 5 : Suite remarquable

Déterminer le terme général de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

Exercice 6 : Suite remarquable bis

Exercice 7 : Suite remarquable ter

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

1. Déterminer pour tout entier n, l'expression de u_n en fonction de n.
2. Soit n un entier non nul. Calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i$

Exercice 8 : Etude de fonction

On considère l'application

$$f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = (x + \ln x)\, e^{x-1}.$$

1. Pour tout $x \in]0;+\infty[$, calculer $f'(x)$.
2. Établir :
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \ln x + \frac{1}{x} > 0$$
3. En déduire :
$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} > 0.$$
4. En déduire le sens de variation de f.

Exercice 9 : Parité et utilisation des fonction $\ln$ et $\exp$

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x + 2 - 2\ln(e^x + 1)$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est paire.

Exercice 10 : Bijectivité et fonctions réciproques

Montrer que l'application f est bijective et déterminer sa bijection réciproque :

$$f: \begin{array}{ccc}]-2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1+\ln(2+x) \end{array}$$

Exercice 11 : Résolution d'inéquations et équations

1. $\ln(1+x^2) > 1$
2. $e^x - 5 + \dfrac{6}{e^x} = 0$
3. $e^{3x+1} + e^{2x+1} = 6e^{x+1}$
4. $\ln(x^2 + x + \dfrac{1}{2}) > 0$
5. $\sqrt{x-2} > 4$
6. $\ln\left(\frac{x+3}{4}\right) = \frac{1}{2}(\ln(x) + \ln(3))$

Exercice 12 : Exponentielles et factorisation de polynômes

Résoudre l'équation suivante :

$$e^{2x} + 6e^{-x} = 4e^x - 1$$

Exercice 13 : Polynômes

Soit f la fonction rationnelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-3,0,2\} \quad f(x) = \frac{2x^2 - 16x - 6}{x^3 + x^2 - 6x}$$

Déterminer trois réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-3,0,2\} \quad f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+3}$$

Exercice 14 : Scilab et récurrence

Pour tout entier naturel non nul, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$$

1. Ecrire un programme en langage Scilab qui, demande un entier n (supérieur ou égal à 1) à l'utilisateur et calcule S_n.
2. Montrer que pour tout entier naturel non nul :

$$S_n = 2 + (n-1)2^{n+1}$$

Exercice 15 : Manipulation de ln et exp

On définit la fonction f par : $\forall x \in D,\ f(x) = \ln\left(e^x - e^{-x}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α en donnant la valeur exacte de α.
3. Montrer que le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse α vaut $\sqrt{5}$.

Exercice 16 : Produit de matrices et inversibilité

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A^2 - A$. Déduire que A est inversible, et déterminer son inverse.

Exercice 17 : Probabilité

On dispose de 4 urnes numérotées ;

- $\mathcal{U}1$ contient 4 boules blanches et 1 boule noire,
- $\mathcal{U}_2$ contient 3 boules blanches et 2 boules noires,
- $\mathcal{U}_3$ contient 2 boules blanches et 3 boules noires,
- $\mathcal{U}_4$ contient 1 boule blanche et 4 boules noires.

On effectue un tirage suivant le protocole suivant :

- On choisit une urne. On suppose que la probabilité de choisir l'urne $\mathcal{U}_i$ vaut $\frac{i}{10}$.
- On choisit alors au hasard une boule.

On suppose que la boule tirée est blanche. Quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de l'urne $\mathcal{U}_1$?

Exercice 18 : Convergence de suites

1. $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$ avec $u_0 = 0$. Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0;3]$. En étudier la convergence.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que la suite est majorée par 2 et minorée par 1 (on montrera tout d'abord que pour $k \geq 2, \dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$). En étudier la convergence.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

Exercice 19 : Suites adjacentes

Soient u et v définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$.

1. Montrer que $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. En considérant $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $t_n = 3u_n + 8v_n$, calculer la limite des suites u et v.

Exercice 20 : Dérivation

On considère l'application $\varphi :]0; +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto e^x - xe^{\frac{1}{x}}$.
Calculer, pour tout x de $]0; +\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5} e^{\frac{1}{x}}$$

.

Exercice 21 : Calcul de limites

Calculer si elle existe la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

1. $u_n = 3n^2 - 4n - \dfrac{1}{n}$
2. $u_n = \dfrac{-2 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{4 - e^{-n}}$
3. $u_n = \dfrac{7^n}{4^{n+1}} - \dfrac{1}{n^2}$
4. $u_n = \ln(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}$
5. $u_n = \dfrac{3^n}{2^{2n}}$
6. $u_n = \dfrac{e^{\frac{n}{2}}}{n}$
7. $u_n = \dfrac{n! - 3^{n+1}}{2^n}$
8. $u_n = \dfrac{\ln(n) - 3^{n+1}}{2^n}$

Exercice 22 : Probabilité-Suites-Sommes

Une étude statistique sur une ligne de bus a permis de montrer que la probabilité que le bus soit en retard est de $\frac{1}{5}$.

Monsieur T décide d'utiliser le bus ou le métro :
- le premier jour, il prend le bus
- si le jour n, le bus est retard alors il prend le métro le jour $n + 1$
- si le jour n, le bus n'est pas en retard alors il prend le bus le jour $n + 1$
- si le jour n il prend le métro, il prend le métro ou le bus avec équiprobabilité le jour $n + 1$.

On note A_n l'événement "Monsieur T a pris le bus le jour n" et $p_n = P(A_n)$.

1. Que vaut p_1 ?
2. Calculer p_2 puis p_3.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \dfrac{3}{10} p_n + \dfrac{1}{2}$
4. Déterminer l'expression de p_n en fonction de n.
5. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k$.

Exercice 23 : Probabilités

Une urne contient deux boules : une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages successifs dans cette urne selon le protocole suivant :
- si la boule tirée est rouge alors elle est remise dans l'urne accompagnée d'une autre provenant d'un stock annexe ;
- si la boule tirée est blanche, alors elle est retirée et les tirages s'arrêtent.

On nomme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, R_n l'événement : « le n-ième tirage amène une boule rouge ». Soit A_n l'événement : « les n premiers tirages amènent une boule rouge ». Exprimer A_n en fonction des R_n puis calculer sa probabilité.

Exercice 24 : Système à paramètres

Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles les systèmes sont de Cramer, puis les résoudre en distinguant tous les cas.

$$\left\{\begin{array}{r}(1-\lambda)x-y+2z=0\\ x-(1+\lambda)y+2z=0\\ x-y+(2-\lambda)z=0\end{array}\right.$$

Exercice 25 : Puissances de matrices

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}5&-4\\4&-3\end{pmatrix}$.

On se propose de calculer A^n par trois méthodes, n étant un entier naturel.

1ère méthode

Calculer A^2, A^3, A^4. En déduire une conjecture puis prouver cette conjecture par récurrence.

2ème méthode

Soit la matrice $J=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$. Exprimer A en fonction de J et de I_2 puis en déduire A^n.

3ème méthode

En remarquant que $A^2=2A-I_2$, montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout entier n, $A^n=a_nA+b_nI_2$; déterminer a_n et b_n.

Exercice 26 : Manipulation de sommes

Soit $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k+k}$.

1. En remarquant que pour tout entier n, $2^n+n\geqslant 2^n$, montrer que u est bornée.
2. En déduire que u converge et que sa limite vérifie $1\leqslant l\leqslant 2$.

Exercice 27 : Calcul de limites

Calculer les limites suivantes :

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}$ (3) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\>}}e^{-\frac{1}{x}}$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{e^{-x}+e^{x}}$:

(5). $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x)}{x}$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3+x)}{x}$ (7) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)+x}{x+1}$ (8) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}}{x}$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ (10) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x-1}$ (11) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ (12) $\displaystyle\lim_{x\to0}x^x$.

Exercice 28 : Dérivées successives et raisonnement par récurrence

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. Calculer $f^{(k)}(x)$ pour $k \in [\![1,4]\!]$ et $x \in \mathbb{R}^*$
2. Conjecturer une formule générale pour $f^{(n)}(x)$ puis la démontrer par récurrence sur n.

Exercice 29 : Inégalité des accroissements finis

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) = u_n + \frac{1}{4}(2 - u_n^2)$.

1. Etudier les variations de f et montrer que $f([1,2]) \subset [1,2]$.
2. Montrer que pour tout entier n dans $\mathbb{N}$, $u_n \in [1,2]$.
3. Montrer que si (u_n) converge vers l alors $l = \sqrt{2}$.
4. Montrer que pour tout $t \in [1,2] \quad : \quad |f'(t)| \leqslant \frac{1}{2}$.
5. Montrer que pour tout entier n dans $\mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$, puis que : $\quad |u_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
6. En déduire la convergence de la suite (u_n).

Exercice 30 : Fonction $\mathcal{C}^1$

Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 \ln(x) & \text{si} & x > 0 \\ 0 & \text{si} & x = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 31 : Ecricome 2012

On considère la fonction définie sur l'ensemble des réels positifs par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} f\,(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ f\,(0) = 1 & \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'\,(0)$.

Exercice 32 : Exercice synthèse sur continuité-dérivabilité

Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$.

1. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et étudier la dérivabilité en 0 du prolongement.
2. Etudier f (tableau de variation complet).
3. Etudier la convexité de f et montrer que la courbe représentative de f admet un point d'inflexion. Déterminer l'équation de la tangente en ce point.