Fiche d'exercice : POLYNÔMES

Exercice 1 : $(**)$

Soit P le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 8$$

Montrer que $P+1$ est le carré d'un polynôme Q à déterminer.
En déduire une factorisation du polynôme P.

Exercice 2 : $(**)$

Soit P le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x + 7$$

Montrer que $P-8$ est le cube d'un polynôme Q à déterminer.
En déduire une factorisation du polynôme P

Exercice 3 : $(*)$

Soit P le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$$

Déterminer une racine évidente du polynôme P et en déduire une factorisation du polynôme P.

Exercice 4 : $(**)$

Soit P le polynôme defini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4$$

Déterminer une racine évidente du polynôme P et en déduire une factorisation du polynôme P.

Exercice 5 : $(**)$

Soit le polynôme P définie pour tout réel x par : $P(x) = -x^4 + 2x^3 - x + 2$.

1. Montrer que P possède deux racines évidentes.
2. Résoudre l'équation $P(x) \geqslant 0$.
3. Résoudre l'inéquation $-(\ln(x))^4 + 2(\ln(x))^3 - \ln(x) + 2 > 0$.

Exercice 6 : $(*)$

Soit f la fonction rationnelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-3, 0, 2\} \quad f(x) = \frac{2x^2 - 16x - 6}{x^3 + x^2 - 6x}$$

Déterminer trois réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-3, 0, 2\} \quad f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+3}$$

Exercice 7 : $(**)$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$2x^3 - 3x^2 + 5x - 4 = 0$$

Exercice 8 : $(*)$

Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = |-x^2 + 5x - 7|$$

La fonction f est-elle un polynôme ?

Exercice 9 : $(*)$

Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 4x + 30$$

1. Montrer qu'il existe deux réels a et b à déterminer tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (x^2 - 2)(x^2 + ax + b)$$

2. En déduire les racines de f.

Exercice 10 : $(**)$

Soit f le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^4 + 12x^3 + 18x^2 - 140x - 147$$

1. Vérifier que -1 et 3 sont des racines de f. En déduire qu'il existe un polynôme g tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x+1)(x-3)g(x)$$

2. Déterminer $g(x)$ et résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 11 : $(**)$

Soit P un polynôme tel que : $\forall X \in \mathbb{R}, P(X+1) = P(X)$. Supposons de plus P possède au moins une racine réelle α.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha + n$ est une racine de P.
2. En déduire l'ensemble des polynômes vérifiant ces hypothèses.

Exercice 12 : $(***)$

Déterminer un polynôme de degré 3 tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x+1) - P(x) = x^2$$

En déduire une nouvelle méthode pour démontrer la formule

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

En utilisant une méthode similaire mettant en scène un polynôme Q de degré 5, déterminer une formule pour :

$$\sum_{k=0}^{n} k^4$$

Exercice 13 : $(**)$

On considère, pour tout entier n non nul, la fonction polynôme f_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = (1+2x)^n - 2^n x^n$$

1. (a) Donner les formes développées des fonctions f_1, f_2, f_3. Dans chacun des cas, déterminer leurs racines.
   (b) Développer la fonction f_4.
   Vérifier que f_4 s'annule en $-\frac{1}{4}$. En déduire les racines de f_4.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, f_n est de degré $n-1$ et déterminer son coefficient dominant.
3. (a) Montrer que pour tout entier n, la dérivée de f_{n+1} est donnée par :

$$f'_{n+1}(x) = 2(n+1)f_n(x)$$

   (b) Calculer, en fonction de la parité de n, $f_n(-\frac{1}{4})$.
   (c) Déduire des deux questions précédentes, en raisonnant par récurrence, que pour tout entier $n \geqslant 1$, « la fonction f_{2n} admet comme unique racine $-\frac{1}{4}$ et la fonction f_{2n+1} n'admet aucune racine »