Fiche d'exercice : MATRICES

Exercice 1 : Puissances d'une matrice : méthode 1

But : calculer les puissances d'une matrice semblable à une matrice diagonale (uniquement 2×2 dans ce chapitre).

1. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer P^{-1} et calculer $D = P^{-1}MP$.
2. Calculer M^k pour tout entier naturel k, à l'aide du résultat de l'exemple 8.

Exercice 2 : Puissances d'une matrice : méthode 2

But : calculer les puissances d'une matrice par conjecture et récurrence.
Pour les matrices suivantes, calculer les premières puissances, deviner une formule pour la puissance n-ième, puis la montrer par récurrence :
$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ (a, b et c sont trois nombres réels), $\star B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\star\star\, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 3 : Somme et matrice

But : apprendre à manipuler des sommes particulières de matrices.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$.

1. Simplifier pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'expression : $(I_n - A)\displaystyle\sum_{k=0}^{p} A^k$
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(R)$ deux matrices qui commutent, simplifier $(A - B)\displaystyle\sum_{k=0}^{p} A^k B^{p-k}$.

Exercice 4 : Polynômes de matrices et inversibilité

But : voir si une matrice est inversible ou pas à l'aide d'un polynôme de matrices.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A^2 - A$. Déduire que A est inversible, et déterminer son inverse.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $B^3 - 3B^2 + 2B$. Déduire que B n'est pas inversible.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ Calculer $(A - 2I_4)^2$. $A - 2I_4$ est-elle inversible ? Développer $(A - 2I_4)^2$ puis montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 5 : Puissances de matrice

Chaque« grosse »question peut être traitée indépendamment des autres.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les premières puissances de A (à partir de 2) et en déduire une conjecture pour l'expression de A^n, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
   Démontrer ce résultat par récurrence.

2. Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que P est inversible et calculer son inverse.
   (b) Montrer que la matrice $D = P^{-1}CP$ est égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   (c) Montrer par récurrence que $C^k = PD^kP^{-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   (d) Calculer D^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que $C^k = \begin{pmatrix} 2-2^k & 1-2^k \\ 2^{k+1}-2 & 2^{k+1}-1 \end{pmatrix}$.
   (e) On donne $2^{11} = 2048$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} C^k$.

Exercice 6 :

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) telles que pour tout entier n, $A^n = u_nA + v_nI$.
2. Déterminer l'expression de u_n puis de v_n en fonction de n pour tout entier n.
3. Vérifier que u est récurrente linéaire d'ordre 2.
   En déduire les 9 coefficients de la matrice A^n
4. (a) Montrer sans calculs que A est inversible et calculer A^{-1}.
   (b) La formule trouvée en 2 est-elle encore vraie pour A^{-n} ?

Exercice 7 : Autour des matrices inversibles

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ tel que $(A - 2I_p)^3 = 0_p$ avec $A \neq 2I_p$.

1. Justifier que $A - 2I_p$ n'est pas inversible
   (*on pourra distinguer les cas* $(A - 2I_p)^2 = 0_p$ *et* $(A - 2I_p)^2 \neq 0_p$).
2. Justifier que A est inversible et que son inverse vaut $\frac{1}{8}A^2 - \frac{3}{4}A + \frac{3}{2}I_p$.

Exercice 8 : Matrices et coefficients indéterminés

Soit $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$, où a, b et c sont des nombres réels.
Donner toutes les valeurs possibles de a, b et de c telles que :

1. $A^2 = I_3$
2. $A^2 = A$

Exercice 9 :

On donne les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Diagonalisation de A et de B

   (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

   (b) Justifier la relation $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

   (c) Calculer la matrice $\Delta = P^{-1}BP$ et vérifier qu'elle est diagonale.

2. On se propose de calculer les matrices colonne X_n définies par les relations :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall n \in N \quad , \; X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n \; .$$

   A cet effet, on définit pour tout n élément de $\mathbb{N}$: $Y_n = P^{-1}X_n$ et on pose également $Y_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

   (a) Montrer que $Y_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $Y_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+2} = DY_{n+1} + \Delta Y_n$.

   (c) Montrer alors que pour tout entier naturel n : $\begin{cases} u_{n+2} & = & u_{n+1} \\ v_{n+2} & = & 4v_n \\ w_{n+2} & = & -4w_{n+1} - 4w_n \end{cases}$

   En déduire les expressions explicites de u_n , v_n , et w_n en fonction de n.

   (d) Donner finalement la matrice X_n , en fonction de n .