Exercices supplémentaires de première année

Exercice 1 :

Partie 1

On pose, pour tout entier $n$supérieur ou égal à 1, $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N} - \{0,1\}, \quad \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leqslant \ln(n) + 1$ (nous allons traiter cette question ensemble lors de la correction).

Partie 2

On considère une suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation suivante, valable pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1. (a) Montrer par récurrence que chaque terme de cette suite est parfaitement défini et strictement positif.
   (b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
2. (a) Pour tout entier k, exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de u_k^2.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 = 2n + 1 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 \geqslant 2n + 1$. En déduire la limite de la suite (u_n).
3. (a) A l'aide du résultat précédent, montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $u_n^2 \leqslant 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1}$.
   (b) En utilisant la partie 1., établir que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $u_n^2 \leqslant 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}$.
   (c) En déduire finalement que $u_n \sim \sqrt{2n}$ quand $n \to +\infty$.

Partie 3

1. (a) Ecrire un programme en Scilab, qui permette de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \geqslant 100$.
   (b) On donne $ln(2) < 0,70$ et $ln(5) < 1,61$. En déduire un majorant de $\ln 5000$
   (c) Montrer que l'entier n trouvé en 2a) est compris entre 4995 et 5000.
2. (a) Ecrire un programme, toujours en Scilab, qui pour un entier $n \geqslant 2$ entré par l'utilisateur, calcule le rapport $\frac{u_n}{\sqrt{2n}}$.
   (b) Faire tourner le programme pour des valeurs de n de plus en plus grandes. Qu'observe-t-on ? Etait-ce prévisible d'après les questions précédentes ?

Exercice 2 : Des inégalités

Les questions de cet exercice sont indépendantes :
Montrer que :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$,
$$x^2 + y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0$$
2. $\forall x, y \geqslant 0$,
$$\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$$
3. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ distincts,
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2$$
4. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $0 < x \leqslant y$,
$$x \leqslant \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)} \leqslant \frac{x+y}{2} \leqslant y$$
5. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que la fonction polynomiale $P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx$ vérifie :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x+1) - P(x) = x^2$$

Exercice 3 : Des inégalités (bis)

1. Montrer que
$$\forall x, y \geqslant 0, \quad \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$$
2. En déduire que
$$\forall x, y, z \geqslant 0, \quad (x+y)(x+z)(y+z) \geqslant 8xyz$$
3. Montrer que :
$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad (x+y)(x+z)(y+z) = (xy + xz + yz)(x+y+z) - xyz$$
4. Déduire des deux questions précédentes que
$$\forall x, y, z > 0, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant \frac{9}{x+y+z}$$

Exercice 4 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, une famille de $2n$ réels quelconques. On veut prouver l'inégalité :
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$
Pour cela on pose $A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, B = \sum_{k=1}^{n} b_k^2, C = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$.

1. Calculer $P(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2$ en fonction de x, A, B et C.
2. En déduire que $C^2 \leqslant AB$. L'inégalité est donc à présent prouvée. Dans quel cas a-t-on l'égalité ?
3. Montrer que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont n réels strictement positifs quelconques, alors :
$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geqslant n^2$$

Exercice 5 : Valeur approchée du nombre d'or

Soit ϕ la solution positive de

$$x^2 - x - 1 = 0$$

1. Vérifier que $\phi = \sqrt{1+\phi}$
2. Justifier que $1 < \phi < 2$.
3. Soit (u_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_1 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{1+u_n} \end{array} \right\}$$

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant u_n \leqslant \phi$.

   (b) Etudier le sens de variation de (u_n).

   (c) Montrer à l'aide des questions (1) et (2), que pour tout $n \geqslant 1$,

$$|u_{n+1} - \phi| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \phi|$$

   .

   (d) En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$|u_n - \phi| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

4. Déterminer le plus petit entier n à partir duquel on est sûr que l'erreur commise en approximant ϕ par u_n est inférieure $0,01$. On pourra utiliser le fait que

$$\frac{\ln(10)}{\ln(2)} \simeq 3,322$$

5. Ecrire un programme Scilab qui permet de calculer le plus petit entier pour lequel l'erreur commise en approximant ϕ par u_n est inférieure à une précision `e` entrée par l'utilisateur.

Exercice 6 : Autour de la loi de Benford (ESSEC 2014)

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière, c'est à dire le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x, et $\{x\}$ sa partie fractionnaire : $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. On note $\log z$ le logarithme en base 10 du réel $z > 0$. On a donc $\log z = \frac{\ln z}{\ln 10}$. On rappelle en particulier les propriétés suivantes, qu'on poura utiliser sans démonstration

$$\forall z > 0,\ 10^{\log z} = z$$

$$\forall z > 0, \forall z' > 0, \log(z.z') = \log z + \log z'$$

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \log\left(10^{a}\right) = a$$

On a par exemple $\log(100) = 2$, $\log(\sqrt{10}) = \frac{1}{2}$.

1. (a) Montrer que pour tout réel x positif et non nul, on a

$$x = 10^{\{\log x\}}.10^{\lfloor \log x \rfloor}.$$

Cette décomposition est dite *notation scientifique* de x.

(b) Montrer que pour tout $x > 0$, le couple $(10^{\{\log x\}}, \lfloor \log x \rfloor)$ est l'unique couple (α, n) dans $[1, 10[\times\mathbb{Z}$ tel que $x = \alpha.10^n$.

(c) Soit $x > 0$. On pose $\gamma = \lfloor 10^{\{\log x\}} \rfloor$. Montrer que $\gamma \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.

2. Pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq 9$, on pose $p_k = \log(1+\frac{1}{k})$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{9} p_k = 1$.

$(p_k)_{1\leq k\leq 9}$ définit donc une loi de probabilité sur $\{1, 2, \ldots, 9\}$ dite *loi de Benford.*

Exercice 7 : Quelques petites questions de raisonnement

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective et impaire. Montrer que sa bijection réciproque est elle même impaire.
2. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$$
3. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 1 - x < x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant 1$$

Exercice 8 : Manipulations de coefficients binomiaux

Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$. Calculer

1. $$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$$
2. $$\sum_{k=p}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{p}$$

   (On suppose ici que $p < n$).

Exercice 9 : Autour des matrices nilpotentes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle **nilpotente**, c'est à dire pour laquelle il existe un entier $r \in \geq 2$ tel que $A^r = 0$.
On suppose dans la suite que r est son **indice de nilpotence**, c'est à dire le plus petit entier tel que $A^r = 0$ *ainsi* $A^{r-1} \neq 0$*)*.

1. $\star\star$ Montrer que A n'est pas inversible.
2. $\star\star$ Simplifier $(I_n - A) \displaystyle\sum_{k=0}^{p} A^k$, pour $p \in \mathbb{R}$. Déduire que $I_n - A$ est inversible, et préciser son inverse.
3. Appliquer les questions 1. et 2. à $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 10 : Racines de polynômes symétriques (HEC 2014)

1. **Préliminaires**
   On définit une suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^\times}$ de polynômes par :
   pour tout réel x,
   $$R_1(x) = x, \quad R_2(x) = x^2 - 2$$
   et pour tout entier k supérieur ou égal à 2,
   $$R_{k+1}(x) = xR_k(x) - R_{k-1}(x)$$
   (a) Déterminer les polynômes R_3 et R_4.
   (b) Montrer que, pour tout entier k strictement positif, R_k est un polynôme de degré k vérifiant pour tout réel x non nul, l'égalité :
   $$R_k\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^k + \frac{1}{x^k}$$
   (c) Pour tout réel a, déterminer, s'ils existent, les réels x non nuls qui vérifient la relation suivante : $x + \dfrac{1}{x} = a$.

2. **Étude des racines**
   Dans cette question, Q désigne un polynôme de degré $2n$ défini par : $Q(x) = \sum\limits_{k=0}^{2n} a_k x^k$, tel que a_{2n} soit non nul et tel que, pour tout entier k de l'intervalle $[\![0, n]\!]$, l'on ait : $a_k = a_{2n-k}$.
   On définit alors le polynôme $\widetilde{Q}$ par :
   $$\widetilde{Q}(x) = a_n + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} R_k(x).$$
   (a) Vérifier que 0 n'est pas racine de Q.
   (b) Soit x un réel non nul, on pose : $y = x + \dfrac{1}{x}$.
   Montrer que $\dfrac{Q(x)}{x^n}$ est nul si et seulement si $\widetilde{Q}(y)$ est nul.
   Quel est l'intérêt de ce résultat dans la recherche des racines de Q ?
   (c) On suppose que n est égal à 3 et que Q est défini par :
   $$Q(x) = x^6 + x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 9x^2 + x + 1.$$
   Déterminer les racines de Q.

Exercice 11 : Suite de Fibonacci, nombre d'or et coefficient binomiaux

I. Le nombre d'or

1. La seule solution positive de l'équation du second ordre $x^2 - x - 1 = 0$ est notée φ et appelée **nombre d'or**. Calculer φ.
2. Montrer les égalités : $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 = \frac{\varphi}{\varphi+1}$

II. La suite de Fibonacci

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n-k}$.

On remarque que dans cette somme certains éléments peuvent être nuls en utilisant la propriété : si $p > n$ alors $\binom{n}{p} = 0$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.
2. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout entier k compris entre 0 et n on a :

$$\binom{k}{n-k} + \binom{k}{n+1-k} = \binom{k+1}{n+1-k}$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n + u_{n+1} = u_{n+2}$.

III. Valeur approchée de φ

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à l'aide de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

1. (a) Etablir que pour tout entier n : $v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}$
   (b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant 1$.
2. (a) Montrer en utilisant les égalités de **I** que pour tout entier n : $\varphi - v_{n+1} = \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{v_n}$ puis que tout entier n, $|\varphi - v_{n+1}| \leqslant \frac{1}{\varphi}|\varphi - v_n|$
   (b) En déduire par récurrence que pour tout entier n, $|\varphi - v_n| \leqslant \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{n+1}$.
   (c) Vérifier que : $\varphi > \frac{3}{2}$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \varphi$.
   (d) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est une valeur approchée de φ à $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.
   Compléter le programme suivant pour qu'il affiche une valeur approchée de φ à 10^{-6} près.

```
v=1
k=0
while ....... then
  k=...
  v=...
end
disp(v)
```

Exercice 12 : (Suite implicite 1)

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 3.
On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0,\ f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1. Etude de f_n
   (a) Etudier f_n et dresser son tableau de variation
   (b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions. En notant u_n la plus petite et v_n la plus grande de ces deux solutions, on vérifiera que : $\forall n \geqslant 0 < u_n < n < v_n$
2. Etude de $(u_n)_{n\geqslant 3}$
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 3, \quad 1 < u_n < e$.
   (b) Montrer que $\forall n \geqslant 3, \quad f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$. En déduire le sens de variation de $(u_n)_{n\geqslant 3}$.
   (c) Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est convergente, puis établir sa limite.
   (d) Montrer que
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1 \qquad \text{puis que} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n - 1}{\frac{1}{n}} = 1$$
3. Etude de $(v_n)_{n\geqslant 3}$
   (a) Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$?
   (b) Calculer $f_n(n\ln(n))$ puis montrer que $\forall n \geqslant 3,\ n\ln(n) < v_n$.
   (c) Soit g la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = x - 2\ln(x)$.
   Etudier g et donner son signe. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n > 2\ln(n)$.
   (d) En déduire le signe de $f_n(2n.\ln(n))$, puis établir que : $n\ln(n) < v_n < 2n.\ln(n)$
   (e) Montrer enfin que :
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(v_n)}{\ln(n)} = 1$$

Exercice 13 : (Suite implicite 2)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$.

1. Prouver que f est une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $x + \ln(x) = n$ possède une unique solution, que l'on notera x_n.
   (b) Calculer x_1. Etudier la monotonie et la convergence de la suite (x_n).
3. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{2} \leqslant x_n \leqslant n$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n - \ln(n) \leqslant x_n$.
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n}$

Exercice 14 : (Equation fonctionnelle)

On note E l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = f(1 + \frac{t}{2})$$

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions appartenant à E.

1. Soit x un réel donné. On définit la suite (x_n) par $x_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 2x_{n+1} - x_n - 2 = 0$
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 2 + \frac{x-2}{2^n}$
   (b) En déduire que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.
2. On considère une fonction f de E. Montrer que la suite $(f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire que f est constante.
3. Quel est l'ensemble E ?

Exercice 15 : (Suite implicite 3)

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on pose :

$$\forall x \in [e, +\infty[, f_n(x) = \exp\left(\frac{x}{n}\right) - x$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution, notée b_n sur $[e, +\infty[$.
2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 3, b_n \geqslant n \ln n$, puis en déduire la limite de la suite (b_n).
3. (a) Etudier sur $]0, +\infty[$ la fonction g définie par : $\forall x > 0, g(x) = x - 2\ln x$.
   (b) En déduire le signe de $f_n(2n\ln n)$, puis donner un encadrement de b_n, puis de $\ln(b_n)$.
   (c) En déduire alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{b_n}{n \ln n}$

Exercice 16 : ESCP 2002

Pour toutes suites numériques $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit la suite $u * v = w$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$$

Partie I : Exemples

1. **Premiers exemples**
   Pour tout entier naturel n, calculer w_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :
   (a) pour tout entier naturel n, $u_n = 2$ et $v_n = 3$.
   (b) pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$.
   (c) pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$ et $v_n = \dfrac{3^n}{n!}$.
2. **Programmation**
   Dans cette question, les suites u et v sont définies par :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(n+1) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n+1}.$$
   Écrire un programme Scilab qui demande à l'utilisateur une valeur de l'entier naturel n, qui calcule et affiche les valeurs $w_0,\ w_1,\ \dots,\ w_n$.
3. **Un résultat de convergence**
   Dans cette question, la suite u est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.
   (a) Établir, pour tout couple d'entiers naturels (n, m) vérifiant $n < m$, l'inégalité : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant u_n$.
   (b) Soit n un entier strictement supérieur à 1. Prouver les inégalités :
   $$w_{2n} \leqslant v_0\, u_{2n} + 2v_n + v_1\, u_n \quad \text{et} \quad w_{2n+1} \leqslant v_0\, u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1\, u_n$$
   (c) En déduire que les deux suites $(w_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0 ainsi que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Soit u' la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u'_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$. À l'aide de la question précédente, montrer que la suite $u' * v$ est convergente et de limite nulle.

Partie II : Application à l'étude d'un ensemble de suites

Dans cette partie, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$$

1. Montrer que toute suite décroissante de réels positifs est élément de A et qu'une suite strictement croissante ne peut appartenir à A.
2. Soit $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$.
   (a) Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que l'on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$
   (b) En déduire qu'il existe des suites appartenant à A et non monotones.
3. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de A et b la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   On définit alors la suite c par : $c_0 = a_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = a_n + \dfrac{1}{2}a_{n-1}$.

(a) Montrer que la suite c est décroissante à partir du rang 1 et qu'elle converge vers un nombre ℓ que l'on ne cherchera pas à calculer.

(b) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n$.

Que peut-on en déduire pour les suites $b * c$ et a ?

(c) Soit ε la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_n = c_n - \ell$ et d la suite $b * \varepsilon$.

En utilisant le résultat de la question 3. de la Partie 1, montrer que la suite d converge vers 0.

(d) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité : $d_n = a_n - \dfrac{2}{3}\ell\left(1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

En déduire que la suite a converge et préciser sa limite.

Exercice 17 : ESCP 1998

Dans tout l'exercice n désignera un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. (a) Etudier, suivant la parité de n, le tableau de variations de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{n+1} + x^n$.

   (b) Montrer que dans tous les cas $f_n\left(-\dfrac{n}{n+1}\right) < 2$.

   (c) En déduire, suivant la parité de n, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x :
$$x^{n+1} + x^n = 2.$$

2. On note A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que
$$A \;=\; P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

   Indication : cela revient à rechercher P tel que $AP = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. On considère l'équation matricielle d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:
$$(E_n) \qquad X^{n+1} + X^n = A.$$

   (a) En posant $Y = P^{-1}XP$, montrer que X est solution de (E_n) est équivalent à Y solution de
$$(E'_n) \qquad Y^{n+1} + Y^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (b) Soit Y une solution de (E'_n). On pose $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

      i. Montrer que $DY = YD$.
      ii. En déduire que $b = c = 0$.
      iii. Quelles sont les valeurs possibles de a ?
      iv. Discuter, suivant les valeurs de n, le nombre de solutions de l'équation (E_n).

   (c) On note α la solution négative de l'équation numérique $x^4 + x^3 = 2$. Déterminer les solutions de l'équation (E_3) à l'aide de α.

Exercice 18 : Ecricome 2001

On désigne par n un entier naturel non nul et a un réel strictement positif.
On se propose d'étudier les racines de l'équation :

$$(E_n)\ :\ \frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\ldots+\frac{1}{x+2n}=a$$

À cet effet, on introduit la fonction f_n, de la variable réelle x définie par :

$$f_n(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\cdots+\frac{1}{x+2n}-a=\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{x+k}-a$$

1. **Étude d'un cas particulier.**

   Pour cette question seulement, on prend $a=\dfrac{11}{6}$ et $n=1$.

   (a) Dresser le tableau de variation de f_1

   (b) Calculer $f_1(1)$, puis déterminer les racines de (E_1).

2. **Dénombrement des racines de (E_n).**

   (a) Dresser le tableau de variations de f_n.

   (b) Justifier l'existence de racines de l'équation (E_n) et en déterminer le nombre.

3. **Équivalent de la plus grande des racines quand n tend vers $+\infty$.**
   On note x_n la plus grande des racines de (E_n).

   (a) Justifier que $x_n>0$.

   (b) Démontrer que pour tout réel $x>1$:

   $$\frac{1}{x}<\ln\frac{x}{x-1}<\frac{1}{x-1}$$

   (c) En déduire que pour x réel strictement positif :

   $$f_n(x)-\frac{1}{x}+a<\ln\left(1+\frac{2n}{x}\right)<f_n(x)-\frac{1}{x+2n}+a$$

   puis, que :

   $$a-\frac{1}{x_n}<\ln\left(1+\frac{2n}{x_n}\right)<a-\frac{1}{x_n+2n}$$

   (d) Montrer que pour tout n entier naturel, non nul :

   $$x_n>\frac{2n}{\exp a-1}$$

   (e) Quelle est la limite de x_n, puis la limite de $\ln\left(1+\dfrac{2n}{x_n}\right)$, lorsque n tend vers $+\infty$?

   (f) Prouver enfin l'existence d'un réel δ, que l'on exprimera en fonction de a, tel que l'on ait, au voisinage de l'infini, l'équivalent suivant :

   $$x_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\delta.n$$